

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Nanopartikel

Nanoteknologi adalah pembuatan dan penggunaan materi dengan ukuran yang sangat kecil yaitu skala atomik. Materi tersebut berukuran antara 1 hingga 100 nanometer (Auffan *et al.*, 2009). Nanopartikel mempunyai luas permukaan yang besar dengan volume yang kecil. Umumnya nanopartikel ini berberbentuk kluster yaitu kumpulan unit (atom atau molekul) yang terdiri dari 50 unit (Buzea, 2007). Nanopartikel lebih reaktif dan memiliki sifat yang berbeda daripada material *bulk*.

Ada 2 faktor yang menyebabkan sifat nanopartikel berbeda secara signifikan dengan material *bulk*. Pertama peningkatan area permukaannya, nanopartikel memiliki nilai perbandingan antara luas permukaan dan volume yang lebih besar jika dibandingkan dengan material *bulk*. Ini membuat nanopartikel bersifat lebih reaktif (Abdullah, 2008). Kedua, efek *quantum confinement*, perilaku material tidak kontinu yang disebabkan perpindahan elektron (Buzea, 2007). Faktor-faktor tersebut dapat mengubah atau meningkatkan sifat-sifat seperti: reaktifitas, sifat mekanik, optik, listrik dan magnetik dari suatu material.

Sifat-sifat yang berubah pada nanopartikel biasanya berkaitan dengan fenomena-fenomena berikut ini (Gunawan, 2011): Pertama adalah fenomena kuantum sebagai pembatasan ruang gerak elektron dan pembawa muatan lainnya dalam partikel. Fenomena ini berimbas pada beberapa sifat material seperti perubahan warna yang dipancarkan, transparansi, kekuatan mekanik, konduktivitas, listrik dan magnetisasi. Kedua adalah perubahan rasio jumlah atom yang menempati permukaan terhadap jumlah total atom. Fenomena ini berimbas pada perubahan titik didih, titik beku, dan reaktivitas kimia. Perubahan-perubahan tersebut dapat menjadi keunggulan nanopartikel dibandingkan dengan partikel sejenis dalam keadaan *bulk*.

Nanopartikel sangat menarik karena sifat optik dan reaktifitas yang ditunjukkan jika dibandingkan dengan partikel yang lebih besar dari material yang sama. Sebagai contoh TiO₂ dan ZnO menjadi berwarna bening pada skala nano dan dapat diaplikasikan sebagai *sunscreens*. Terdapat juga perbedaan reaksi dari

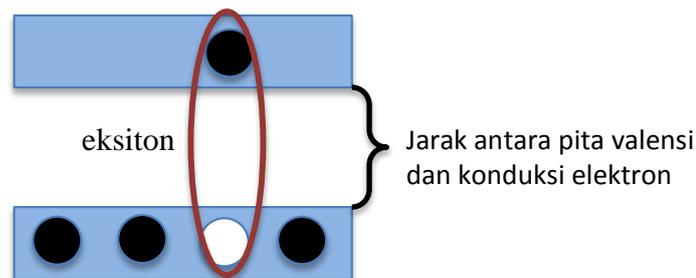
nanopartikel logam emas dengan material *bulk*-nya. Nanopartikel emas berwarna kuning dan silikon abu-abu berwarna merah, namun jika didalam larutan tampak merah pekat hingga hitam. Nanopartikel emas mencair pada suhu yang lebih rendah ($\sim 300\text{ }^{\circ}\text{C}$ untuk ukuran 2,5 nm) daripada lempengan emas ($1064\text{ }^{\circ}\text{C}$) (Buffat, 1976).

2.2 *Semiconductor Quantum Dots*

Terdapat beberapa jenis material yang digunakan sebagai nanopartikel, diantaranya: logam, dielektrik, semikonduktor, dan kombinasinya. Nanopartikel yang terbuat dari bahan semikonduktor dan berukuran sangat kecil adalah *quantum dots*. *Quantum dot* juga merupakan material yang menyerap dan memancarkan cahaya secara efisien dan spesifik bergantung pada ukurannya, sehingga banyak diaplikasikan dalam bidang optoelektronik seperti pada laser dan LED (Schulz, 2011).

Quantum dot mengikuti prinsip mekanika kuantum yaitu *quantum confinement*. Absorpsi pada *quantum dot* sesuai dengan transisi dikrit elektron yang terkurung kotak berukuran nano dalam tiga arah. *Quantum dot* terkurung dalam tiga arah karena diameter quantum dot sebanding dengan panjang gelombang elektron. Transisi dikrit tersebut sesuai dengan spektrum atom pada *quantum dot* (Silbey, 2005).

Sifat optik pada *quantum dot* dijelaskan pada gambar 2.1 (vandriel, 2005):



Gambar 2.1 eksitasi elektron

Pada semikonduktor penyerapan cahaya biasanya menyebabkan elektron tereksitasi dari valensi ke pita konduksi, dan meninggalkan lubang (*hole*). Elektron yang tereksitasi membentuk eksiton. Ketika eksiton tersebut kembali ke keadaan dasarnya, eksiton akan memancarkan energi cahaya. Energi *confinement* bergantung pada ukuran *quantum dot*, maka energi cahaya yang diserap dan emisi cahaya yang dipancarkan dapat diatur dengan mengubah ukuran *quantum dot*.

2.3 Density matrix

Keadaan kuantum suatu sistem dapat dideskripsikan secara matematis dengan fungsi gelombang (ψ). Fungsi gelombang adalah superposisi dari basis ortonormal $|\varphi_n\rangle$ dan bilangan kompleks untuk membentuk fungsi gelombang baru dan membentuk ruang Hilbert. Bentuk umum fungsi gelombang adalah (Freegard, 2012)

$$|\psi_{(r,t)}\rangle = \sum c_n |\varphi_n\rangle \quad (2.1.a)$$

$$c_n = \langle \varphi_n | \psi_{(r,t)} \rangle \quad (2.1.b)$$

c_n adalah koefisien ekspansi pada fungsi gelombang, c_n tersebut hanya bergantung pada waktu. Dan $|c_n|^2$ mempunyai arti fisis probabilitas untuk menemukan sistem pada keadaan $|\varphi_n\rangle$. Sedangkan fungsi φ_n adalah basis dari fungsi gelombang, φ_n hanya bergantung pada dimensi ruang. Basis φ_n merupakan basis ortonormal, sehingga $\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$.

Jika fungsi gelombang diketahui, maka pencarian semua informasi dari sistem tersebut dapat dilakukan. Posisi, energi, momentum sistem dan harga ekspektasi dapat dihitung jika fungsi gelombang dari suatu sistem diketahui. Perhitungan harga ekspektasi yang diamati direpresentasikan sebagai operator \hat{O}

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi_{(r,t)} | \hat{O} | \psi_{(r,t)} \rangle \quad (2.2.a)$$

$$= \sum_{m,n} c_m^* c_n \langle \varphi_{(r,t)} | \hat{O} | \varphi_{(r,t)} \rangle \quad (2.2.b)$$

$$= \sum_{m,n} c_m^* c_n O_{mn} \quad (2.2.c)$$

Kurung siku pada operator \hat{O} menunjukkan rata-rata mekanika kuantum. O_{mn} merupakan elemen matriks dari operator \hat{O} .

Terdapat suatu keadaan dimana fungsi gelombang sistem tidak dapat diketahui secara tepat. Misalnya pada tumbukan yang lemah pada atom, fungsi gelombang pada setiap interaksi dapat berubah. Jika suatu material nanopartikel berinteraksi dengan cahaya akan terjadi transisi frekuensi atom. Namun persamaan

fungsi gelombang sederhana tidak dapat menggambarkan respon resonansi tersebut.

Pada keadaan tersebut fungsi gelombang tidak dapat diketahui karena keadaan tersebut mempunyai banyak nilai $|\psi_{(r,t)}\rangle$. Fungsi gelombang menjadi $|\psi^s\rangle = |\psi^1\rangle, |\psi^2\rangle, |\psi^3\rangle \dots |\psi^n\rangle$, maka probabilitas keadaan tersebut adalah $p_s = p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_n$. Sistem tersebut dinamakan *mixed state*. Pada sistem kuantum dalam *mixed state*, terdapat banyak keadaan kuantum tersebut yang berupa statistik. Probabilitas suatu fungsi gelombang dapat diselesaikan dengan secara klasik, yaitu

$$p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_n = \sum p_s = 1 \quad (2.3)$$

Pada keadaan campuran (*mixed state*), sistem kuantum direpresentasikan dengan vektor keadaan $|\Psi\rangle$. Sistem kuantum yang memiliki satu vektor keadaan $|\Psi\rangle$ dinamakan *pure state*. Namun, pada *mixed state* terdapat dua atau lebih vektor keadaan yang berbeda, misalnya terdapat 50% probabilitas pada keadaan $|\Psi_1\rangle$ dan terdapat 50% probabilitas pada keadaan $|\Psi_2\rangle$. p_s adalah probabilitas dari suatu sistem, jumlah semua probabilitas adalah 1. Diketahui bahwa (Griffiths, 2004)

$$\bar{A} = \sum p_s A \quad (2.4)$$

nilai rata-rata suatu operator (misalnya A) adalah jumlah probabilitas dikalikan operator tersebut.

Dalam mekanika kuantum, harga ekspektasi adalah probabilitas yang diharapkan dari hasil pengamatan. Jika suatu sistem pada keadaan *mixed state* maka suatu sistem tersebut akan mempunyai banyak nilai harga ekspektasi. Rata-rata statistik seperti pada Persamaan (2.4) dapat digunakan untuk menghitung harga ekspektasi dari semua kemungkinan keadaan sistem (Nugroho, 2016)

$$\overline{\langle \hat{O} \rangle} = \sum_{m,n} \sum_s p_s c_m^{s*} c_n O_{mn} \quad (2.5)$$

Jika ρ_{mn} didefinisikan sebagai elemen *density matrix*

$$\begin{aligned} \rho_{nm} &= \sum_s p_s c_m^*(t) c_n(t) \\ &= \overline{c_m^*(t) c_n(t)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Maka rata-rata harga ekspektasi menjadi

$$\begin{aligned}
 \overline{\langle \hat{O} \rangle} &= \sum_{m,n} \rho_{mn} O_{mn} \\
 &= \sum_n \left(\sum_m \rho_{mn} O_{mn} \right) \\
 &= \sum_n (\hat{\rho} \hat{O}) \\
 \overline{\langle \hat{O} \rangle} &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}) \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.6), ρ_{nn} adalah elemen diagonal yang disebut populasi, probabilitas menemukan sistem pada keadaan n . Pada elemen non-diagonal ρ_{mn} merupakan koherensi antara level m dan n . Karena $\rho_{nm} = \rho_{mn}^*$ maka didapat operator elemen matriks bersifat hermitian. Operator elemen matriks dapat didefinisikan sebagai

$$\hat{\rho} = \sum_{s=1}^N p_s |\psi_{(r,t)}\rangle \langle \psi_{(r,t)}| \tag{2.8}$$

Dalam keadaan tersebut, semua informasi statistik dari keadaan mixed state akan diperoleh jika operator *density matrix* tersebut diketahui. *Density matrix* dapat digunakan untuk menemukan probabilitas suatu keadaan kuantum. Untuk menentukan *density matrix* diperlukan hukum mekanika kuantum, karena dengan hukum mekanika kuantum dapat menentukan keadaan kuantum tertentu. Maka sifat fisis dari fungsi gelombang suatu keadaan tersebut dapat digambarkan. Persamaan schrödinger adalah (Boyd, 2007)

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} &= \hat{H}|\Psi\rangle \\
 |\dot{\Psi}\rangle &= \frac{\hat{H}|\Psi\rangle}{i\hbar} \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

\hat{H} adalah operator Hamiltonian dari sistem. Pada operator hamiltonian terjadi dua peristiwa, yaitu hamiltonian yang tidak berinteraksi dengan apapun dan hamiltonian interaksi. Maka direpresentasikan sebagai

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \tag{2.9}$$

operator Hamiltonian \hat{H} terdiri \hat{H}_0 adalah Hamiltonian pada keadaan awal, pada saat belum berinteraksi dengan medan. \hat{H}_I adalah Hamiltonian pada saat berinteraksi dengan suatu medan, \hat{H}_I tersebut bergantung pada waktu. Pada aproksimasi dipol elektrik, operator \hat{H}_0 dan \hat{H}_I adalah

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \hbar\omega_2|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \quad (2.10)$$

$$\hat{H}_I = \hat{\mu}\tilde{E} \quad (2.11.a)$$

$$= \mu_{12}\tilde{E}|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + \mu_{21}\tilde{E}|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1| \quad (2.11.b)$$

$$= \mu_{12}\tilde{E}\hat{\sigma}_- + \mu_{21}\tilde{E}\hat{\sigma}_+ \quad (2.11.c)$$

Jika φ_n diterapkan pada operator Hamiltonian maka φ_n adalah energi eigen yang didapatkan dari solusi persamaan schrödinger, yaitu (Boyd, 2007)

$$\hat{H}_0|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \quad (2.12)$$

Jika Persamaan (2.1) disubstitusikan ke persamaan (2.8), maka didapatkan

$$i\hbar \frac{d|\varphi_n\rangle}{dt} c_n = c_n \hat{H}|\varphi_n\rangle \quad (2.13)$$

φ_n diasumsikan ortonormal, maka

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_m = c_n \hat{H}_{mn} \quad (2.14)$$

c_m dan c_n adalah koefisien ekspansi yang bergantung waktu. Koefisien tersebut harus dinormalisasi agar probabilitas menemukan salah satu sistem adalah 1. bentuk eksplisit dari *density matrix* adalah

$$\rho = \begin{pmatrix} c_2 c_2^* & c_2 c_1^* \\ c_1 c_2^* & c_1 c_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Hasil probabilitas dari suatu keadaan kuantum dinyatakan dalam kombinasi bilinear dari probabilitas amplitudo seperti $c_2 c_2^*$ atau $c_1 c_1^*$.

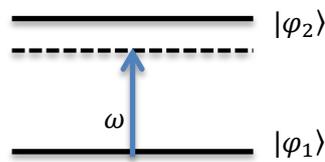
Operator *density matrix* adalah $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Operator *density matrix* tersebut disubstitusikan ke Persamaan (2.8), lalu persamaan diferensialnya diselesaikan dengan menggunakan hukum Leibniz yaitu $\frac{d(uv)}{dt} = u'v + uv'$. Maka didapatkan turunan *density matrix* terhadap waktu dan persamaan gerak dari *density matrix* dapat diselesaikan dengan persamaan Liouville-Von Neumann. Solusi dari persamaan Liouville-Von Neumann secara umum adalah (Berman, 1992)

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\hat{H}}{i\hbar} |\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi| \frac{\hat{H}}{i\hbar} \\
&= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}] \\
&= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \\
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \tag{2.16}
\end{aligned}$$

terdapat operator \hat{H} dan $\hat{\rho}$ didalam kurung siku menandakan komutator, yaitu $[\hat{H}, \hat{\rho}] = [\hat{\rho}\hat{H} - \hat{H}\hat{\rho}]$. Persamaan (2.14) menggambarkan persamaan gerak *density matrix* terhadap waktu sebagai hasil interaksi pada hamiltonian \hat{H} .

2.4 Two-level System

Quantum dot ketika berinteraksi dengan cahaya yang energinya bersesuaian dengan selisih energi dua keadaan kuantum, dapat diaproksimasi atau dapat ditinjau sebagai *two-level system*. Oleh karena itu, pada bagian ini membahas tentang penggunaan *density matrix* dalam *two-level system*.



Gambar 2.2 *two-level system*

Pada Gambar 2.2 suatu atom mengilustrasikan struktur elektronik *two-level system* hanya memiliki dua keadaan yaitu keadaan dasar $|\varphi_1\rangle$ dan keadaan tereksitasi $|\varphi_2\rangle$. Karena hanya memiliki dua keadaan kuantum, fungsi gelombang dari keadaan tersebut adalah

$$|\psi\rangle = c_1|\varphi_1\rangle + c_2|\varphi_2\rangle \tag{2.17}$$

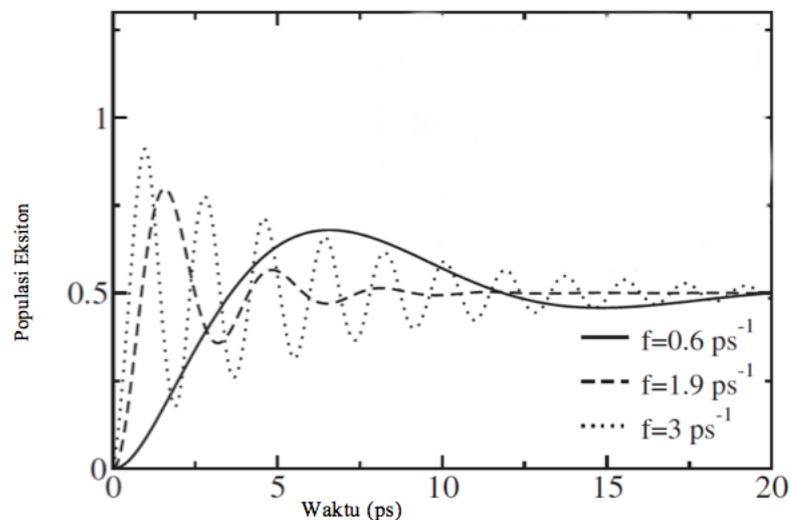
Two-level system terdiri dari keadaan dasar $|\varphi_1\rangle$ dan eksitasi $|\varphi_2\rangle$. Energy pada tiap-tiap keadaan adalah $\hbar\omega_1$ dan $\hbar\omega_2$.

2.5 Osilasi Rabi

Permodelan *two-level system* banyak dipelajari untuk mengetahui hubungan dari interaksi SQD dengan cahaya. Eksplorasi keadaan suatu sistem dalam SQD yang menjadi bahan utama banyak penelitian untuk aplikasi informasi kuantum

adalah dengan menggunakan perilaku siklus pada SQD. Salah satu siklus tersebut disebut osilasi Rabi (Breurer, 2002).

Ketika *two-level system* dipengaruhi oleh cahaya, populasi eksiton berosilasi antara keadaan dasar dan keadaan eksitasi pada frekuensi yang sebanding dengan transisi momen dipol dan medan cahaya tersebut. *Two-level system* memiliki dua kemungkinan tingkat energi, jika tidak berelaksasi, sistem dapat tereksitasi saat menyerap energi. Ketika sebuah atom disinari cahaya yang koheren, terjadi pertukaran energi secara periodik antara medan cahaya dan *two-level system*. Atom tersebut akan secara siklis menyerap cahaya dan memancarkannya kembali dengan emisi terstimulasi.



Gambar 2.3 Evolusi populasi eksiton SQD terhadap waktu untuk masing-masing nilai frekuensi Rabi yang menunjukkan damping pada osilasi Rabi.

Gambar 2.3 menunjukkan populasi eksiton pada keadaan $|\varphi_1\rangle$ sebagai fungsi waktu saat dipengaruhi medan dengan frekuensi Rabi Ω untuk 3 nilai Ω . Frekuensi Rabi sangat mempengaruhi waktu peluruhan, efektifitas waktu peluruhan tersebut sesuai dengan hasil teoritik dan eksperimen (Vagov, *et al.*, 2007). Frekuensi Rabi didefinisikan (Boyd, 2007)

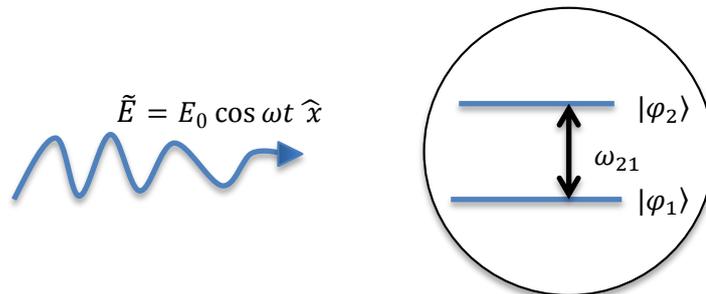
$$\Omega = \frac{\vec{\mu}_{12}}{\hbar} \vec{E}_0 \quad (2.18)$$

μ_{12} adalah momen dipol transisi antara keadaan dasar dan keadaan eksitasi, sedangkan \vec{E}_0 adalah vektor amplitudo medan listrik yang mengalami polarisasi.

Meskipun $\mu_{12}=\mu_{21}$, namun Ω_{12} tidak sama dengan Ω_{21} karena \vec{E}_0 dapat berbentuk kompleks.

2.6 Penerapan Rumusan *Density matrix* pada *Two-Level System*

Pada penelitian ini sistem dapat digambarkan dengan Gambar 2.4. Terlihat bahwa SQD berinteraksi dengan medan eksternal $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \hat{x}$. Dengan E_0 adalah amplitudo medan listrik yang bernilai riil. Selisih frekuensi sudut antar dua level adalah ω_{21} .



Gambar 2.4 Gambaran Sistem

Pada penelitian ini SQD yang digunakan adalah CdSe, berasal dari nanopartikel berukuran dibawah 10 nm yang menunjukkan sifat *quantum confinement*. Arah polarisasi E_0 sejajar dengan momen dipol transisi μ . Menggunakan beberapa parameter sebagai berikut: selisih energi keadaan $|\varphi_1\rangle$ dan $|\varphi_2\rangle$ ($\hbar\omega_{21}$) adalah 2,36 eV, momen dipol transisi (μ) adalah 0,65e nm (Nugroho, 2016).

Jika sistem tidak terisolasi dengan sempurna lalu berinteraksi dengan medan luar, koherensi akan mengalami peluruhan seiring berjalannya waktu, proses tersebut disebut dekoherensi (Schlosshauer, 2005). Dekoherensi merupakan hilangnya informasi dari suatu sistem ke lingkungan (sering dimodelkan untuk interaksi *system-bath*). Interaksi tersebut menyebabkan kehilangan fase yang koheren (*dephasing*) dan menyebabkan populasi berelaksasi. Maka pada sistem seperti itu, perlu untuk menambahkan faktor *damping* ke persamaan gerak elemen *density matrix*.

Untuk menentukan elemen persamaan gerak *density matrix* yang mengalami peluruhan, persamaan Liouville-Von Neumann dapat ditambahkan operator Lindblad berbentuk

$$L = -\frac{1}{2}\{\gamma_{21}(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\rho - 2\hat{\sigma}_-\rho\hat{\sigma}_+ + \rho\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)\} \quad (2.19)$$

Jika suatu sistem kuantum mengalami peluruhan, persamaan gerak *density matrix* dapat ditulis

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + L \quad (2.20)$$

fase fungsi eigen diantara keadaan $|\varphi_1\rangle$ dan $|\varphi_2\rangle$ adalah sama, maka

$$\mu_{12} = \mu_{21} = \mu \quad (2.21)$$

Dengan substitusi operator Hamiltonian \hat{H} pada persamaan (2.10) dan (2.11) ke Persamaan (2.20) maka komponen matriks persamaan gerak menjadi

$$\dot{\rho}_{11} = \gamma_{21}\rho_{22} + i\frac{\mu}{\hbar}\tilde{E}[\rho_{12}^* - \rho_{12}] \quad (2.22.a)$$

$$\dot{\rho}_{22} = -\gamma_{21}\rho_{22} - i\frac{\mu}{\hbar}\tilde{E}[\rho_{12} - \rho_{12}^*] \quad (2.22.b)$$

$$\dot{\rho}_{12} = -\left(\frac{1}{2}\gamma_{21} - i\omega_{21}\right)\rho_{12} - i\frac{\mu}{\hbar}\tilde{E}[\rho_{22} - \rho_{11}] \quad (2.22.c)$$

Karena operator *density matrix* bersifat hermitian maka $\dot{\rho}_{21} = \dot{\rho}_{12}^*$. Frekuensi ω_{21} adalah frekuensi transisi antara keadaan $|\varphi_1\rangle$ dan keadaan $|\varphi_2\rangle$.

Selisih antara frekuensi cahaya datang dan frekuensi transisi disebut *detuning*, $\delta = \omega_{21} - \omega$. Nilai $\dot{\rho}_{11}$ dan $\dot{\rho}_{22}$ dapat diubah menjadi satu persamaan gerak *density matrix* (\dot{Z}), \dot{Z} adalah selisih antara $\dot{\rho}_{22}$ dan $\dot{\rho}_{11}$, maka didapatkan dua persamaan gerak *density matrix* terkopel

$$\dot{Z} = -\gamma_{21}(Z + 1) - 2i\frac{\mu}{\hbar}\tilde{E}(\rho_{12} - \rho_{12}^*) \quad (2.23.a)$$

$$\dot{\rho}_{12} = -\left(\frac{1}{2}\gamma_{21} - i\omega_{21}\right)\rho_{12} - i\frac{\mu}{\hbar}\tilde{E}Z \quad (2.23.b)$$

Medan eksternal yang digunakan adalah medan yang harmonik terhadap waktu

$$E = \vec{E}_0 \cos \omega t \quad (2.24.a)$$

$$= \frac{\vec{E}_0}{2} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \quad (2.24.b)$$

Pada suku $e^{i\omega t}$ dan $e^{-i\omega t}$ terdapat nilai ω yang menyebabkan sistem berosilasi dengan cepat. Karena evolusi waktu yang disebabkan oleh medan yang berinteraksi jauh lebih lambat dari pada ω , suku yang berputar cepat dapat diabaikan, dengan menggunakan sebuah aproksimasi yang dinamai dengan *Rotating Wave Approximation* (RWA).

Aplikasi RWA ke persamaan gerak *density matrix* akan memisahkan suku yang berosilasi lambat terhadap waktu. Suku yang mengandung fungsi $e^{\pm i\omega t}$ dihilangkan, karna berosilasi cepat terhadap waktu.

$$\rho_{12} = e^{-i\omega t} \tilde{\rho}_{12} \quad (2.25)$$

Elemen diagonal *density matrix* ρ_{11} dan ρ_{22} merupakan elemen *density matrix* bergerak lambat terhadap waktu. Substitusi persamaan (2.22) ke persamaan (2.25) menghasilkan (Fam, 2008):

$$\frac{d}{dt}(e^{-i\omega t} \tilde{\rho}_{12}) = -\left(\frac{1}{2}\gamma_{21} - i\omega_{21}\right) e^{-i\omega t} \tilde{\rho}_{12} - i\frac{\mu}{\hbar} \tilde{E}_0 e^{-i\omega t} Z \quad (2.26)$$

Pada persamaan (2.26), nilai $\frac{\mu}{\hbar} \tilde{E}_0$ merupakan frekuensi dari osilasi transisi atom pada saat berinteraksi dengan cahaya yang disebut frekuensi Rabi Ω . Maka persamaan *density matrix* yang bergerak lambat terhadap waktu adalah

$$\dot{Z} = -\gamma_{21}(Z + 1) + 2i\Omega (\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{12}^*) \quad (2.27.a)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{12} = \left(i\delta - \frac{1}{2}\gamma_{21}\right) \tilde{\rho}_{12} + i\Omega Z \quad (2.27.b)$$

2.7 Spektrum Energi Serapan

Spektrum serapan suatu material dapat ditentukan dengan energi medan yang diserap oleh material pada rentang frekuensi tertentu. Pada saat SQD disinari dengan cahaya, energi serapan dapat berasal dari energi konservatif pada elektromagnetik. Dengan persamaan Maxwell, daya serap per volume dengan permukaan S dapat dihitung dan dinyatakan dengan

$$-\int_S (\vec{E} \times \vec{\Pi}) \cdot \hat{n} dS = \int_V \left[\vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{\Pi} \cdot \vec{\Pi} \right) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\Pi} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right] dV \quad (2.28)$$

\vec{J} adalah kerapatan arus, \vec{P} adalah polarisasi listrik (momen dipol listrik per volume), H dan M adalah medan magnet dan vektor polarisasi. Suku $\vec{E} \cdot \vec{J}$ menunjukkan daya yang dikeluarkan medan untuk bergerak, $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{\Pi} \cdot \vec{\Pi} \right)$ sesuai dengan laju peningkatan energi pada vakum elektromagnetik, dan pada $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\Pi} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$ menunjukkan daya per volume medan pada dipol listrik dan magnetik.

Nilai energi (rata-rata waktu) yang terserap persatuan volume oleh induksi dipol pada SQD berhubungan dengan suku ke-empat dari Persamaan (2.28) dan dapat dinyatakan

$$\left\langle \frac{P}{V} \right\rangle_{waktu} = \left\langle \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right\rangle_{waktu} \quad (2.29)$$

tanda kurung braket menandakan rata-rata waktu. Polarisasi menghubungkan medan listrik dengan $\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_E E(t)$ dan untuk menyederhanakan \vec{P} dan \vec{E} diasumsikan paralel satu sama lain, maka (Nugroho, 2016)

$$\begin{aligned} Q &= \left\langle \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{4} \omega \epsilon_0 (E e^{-i\omega t} + c.c) \cos(i\chi E e^{-i\omega t} + c.c) \right\rangle_{waktu} \\ Q &= \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \text{Im}(\chi) |E|^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

ϵ_0 adalah permivitas suatu medium (SQD). ω_{21} adalah selisih frekuensi sudut pada keadaan $|\varphi_1\rangle$ dan $|\varphi_2\rangle$. V adalah volume SQD. χ adalah suseptibilitas dari SQD, didefinisikan sebagai koefisien yang sebanding antara polarisasi (momen dipol per volume) dengan amplitudo dari kuat medan yang berinteraksi.

\vec{P} dan \vec{E} adalah magnitudo yang berubah secara sinusoidal dari polarisasi dan medan listrik. E adalah amplitudo yang kompleks dari medan listrik dan $c.c$ menandakan konjugat kompleks dari medan listrik tersebut. Dari persamaan (2.30) perhitungan energi serapan membutuhkan bagian imajiner dari suseptibilitas χ , maka bagian riil dari suseptibilitas tersebut tidak terserap oleh energi.