BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Pengantar Graf

Graf merupakan pokok bahasan yang mempelajari sifat-sifat graf dimana graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek dan hubungan antara objek tersebut. Representasi visual dari graf menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik sedangkan hubungan antara objek dinyatakan garis.

Graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss, L. Euler berhasil menemukan jawaban terkait masalah jembatan Konigsberg, dimana waktu itu ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai pregal yang terletak di kota Kaliningrat, Jerman. Daratan dinyatakan sebagai titik yang disebut simpul dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang sebut sisi. Penjelasan lebih lanjut mengenai teori graf diberikan definisi-definisi sebagai berikut

Definisi 2.1 (Munir, 2010) *Graf G didefinisikan sebagai sepasang himpunan* (V, E)*, ditulis dengan notasi* $G = (V, E)$*, yang dalam hal ini* V *adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan* E *adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul.*

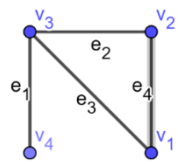
Berdasarkan Definisi 2.1 (Munir, 2010) menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial.

Munir (2010) menyatakan bahwa simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots$, dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, atau gabungan keduanya $v_1, v_2, \dots, v_n$. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dilambangkan dengan $e_1, e_2, \dots$. Dengan kata lain jika sisi e merupakan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v maka e dapat ditulis sebagai berikut

$$e = (u, v)$$

Oleh karena simpul u dan v dihubungkan dengan sisi e, maka simpul u dan simpul v disebut ujung dari sisi e.

Untuk lebih jelasnya diberikan sebuah graf G



Gambar 2.1 Graf G

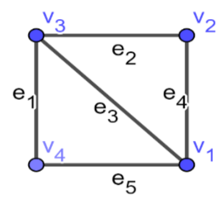
Dari Gambar 2.1 diketahui bahwa graf G merupakan graf trivial yang terdiri dari 4 titik dan 4 sisi, yaitu titik v_1, v_2, v_3, v_4 dan sisi $e_1 = (v_3, v_4)$, $e_2 = (v_3, v_2)$, $e_3 = (v_3, v_1)$, dan $e_4 = (v_1, v_2)$. Dalam hal ini graf G berorde 4 dan berukuran 4. Karena kardinalitas himpunan titik dan sisinya sama-sama bernilai 4. Berikutnya penjelasan lebih lanjut, mengenai terminology graf.

Beberapa Istilah atau terminologi dasar yang sering digunakan pada suatu graf meliputi bertetangga, bersisian, derajat, lintasan, graf terhubung, dan diameter.

Definisi 2.2 (Munir, 2010) *Dua buah simpul pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G.*

Berdasarkan Definisi 2.2, Munir (2010) menyatakan bahwa dua titik G dikatakan bertetangga jika ada sisi yang menghubungkan langsung kedua titik tersebut. Dari Definisi 2.2 diberikan Contoh 2.3 sebagai berikut

Contoh 2.3 diberikan sebuah graf G dengan 4 simpul yaitu v_1, v_2, v_3, v_4 dengan 5 sisi yaitu e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 sebagai berikut



Gambar 2.2 simpul bertetangga pada graf G

Pada Gambar 2.2 simpul v_2 bertetangga dengan simpul v_1 dan v_3, tetapi tidak bertetangga dengan v_4. Selain itu juga diberikan Definisi 2.4 yang merupakan definisi dari bersisian di G.

Definisi 2.4 (Munir, 2010) *Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v apabila $e = (u, v)$*

Berdasarkan Gambar 2.2 diketahui sisi e_1 bersisian dengan simpul v_3 dan v_4, sisi e_2 bersisian dengan simpul v_3 dan v_2, sisi e_4 bersisian dengan simpul v_2 dan v_1, dan sisi e_5 bersisian dengan simpul v_1 dan v_4.

Definisi 2.5 (Harris dkk, 2000) *Derajat suatu simpul $v \in V(G)$ dinotasikan dengan $d(v)$ adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul v. Derajat maksimum pada graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai*

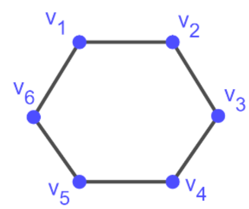
$$\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$$

Sedangkan derajat minimum pada graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai.

$$\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)$$

Berdasarkan Definisi 2.5 dijelaskan bahwa derajat simpul v pada graf yang dinotasikan dengan $d(v)$ adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik v tersebut. Misalnya pada Gambar 2.2, $d(v_1) = d(v_3) = 3$ karena sisi e_3, e_4, e_5 bersisian dengan simpul v_1 sedangkan sisi e_1, e_2, e_3 bersisian dengan simpul v_3 dan $d(v_2) = d(v_4) = 2$ karena sisi e_2 dan e_4 bersisian dengan simpul v_2 sedangkan sisi e_1 dan e_5 bersisian dengan simpul v_4, maka didapatlah derajat maksimum $\Delta(G) = 3$ dan derajat minimum $\delta(G) = 2$.

Definisi 2.6 (Murtaza dkk, 2017) *Himpunan* $N(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$ *disebut persekitaran terbuka dari* u *pada graf* G *dan himpunan* $N[u] \cup \{u\}$ *disebut persekitaran tertutup dari* u *pada graf* G



Gambar 2.3 Graf G_6

Berdasarkan Definisi 2.6 jika dibentuk himpunan semua simpul yang bertetangga dengan simpul $u \in V(G)$ maka diperoleh himpunan persekitaran dari simpul u. Selanjutnya diberikan penjelasan mengenai persekitaran terbukan dan persekitaran tertutup pada suatu graf.

Contoh 2.7 Diberikan graf G_6 yang diperlihatkan pada Gambar 2.3. graf G_6 adalah graf dengan himpunan simpul $V(G_6) = \{v_1, v_2, v_3, V_4, v_5, v_6\}$ dan terdiri dari 6 buah sisi. Berdasarkan Gambar 2.3 diperoleh persekitan terbuka dan tertutup pada graf G_6 disajikan pada Table 2.1

Tabel 2.1 Persekitaran Graf G_6

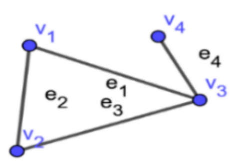
Simpul v_i	**Persekitaran terbuka $N(v_i)$**	**Persekitaran tertutup $N[v_i]$**
v_1	$\{v_2, v_6\}$	$\{v_1, v_2, v_6\}$
v_2	$\{v_3, v_1\}$	$\{v_2, v_3, v_1\}$
v_3	$\{v_4, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_2\}$

v_4	$\{v_5, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_3\}$
v_5	$\{v_6, v_4\}$	$\{v_5, v_6, v_4\}$
v_6	$\{v_1, v_5\}$	$\{v_6, v_1, v_5\}$

Definisi 2.8 (Munir, 2010) *Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal* v_0 *ke simpul tujuan* v_n *didalam graf* G *ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk* $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ *sedemikian sehingga* $e_1 = (v_0 v_1), e_2 = (v_1 v_2) =, \dots, e_n = (v_{n-1} v_n)$ *adalah sisi-sisi dari graf G.*

Berdasarkan Definisi 2.8 dijelaskan bahwa lintasan dua pasang simpul yang berbeda sebagai simpul awal dan simpul akhir yang berbentuk barisan simpul dan sisi yang berselang-seling. Lintasan dengan simpul awal u dan simpul akhir v atau dapat ditulis sebagai lintasan $u - v$ bila mempunyai lebih dari 1 lintasan.

Contoh 2.9 Diberikan graf G dengan simpul v_1, v_2, v_3, v_4 sebagai berikut



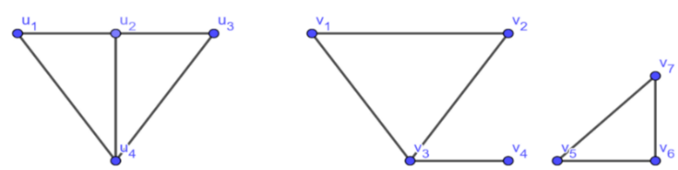
Gambar 2.4 Panjang lintasan pada graf G

Berdasarkan Gambar 2.4, jika diambil simpul awal v_1 dan simpul akhir v_5 atau lintasan $v_1 - v_5$ maka salah satu lintasan terpendek dari kedua simpul tersebut adalah v_1, e_1, v_3, e_4, v_4 dimana lintasan tersebut barisan simpul dan sisi yang berselang-seling. Kedua titik v_1 dan v_4 juga mempunyai lintasan terpanjang yaitu $v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4$. Selain itu, tidak semua graf memiliki lintasan untuk setiap pasang simpul yang berbeda, seperti dijelaskan pada Definisi 2.10.

Definisi 2.10 (Munir, 2010) *Graf tak berarah* G *disebut graf terhubung (connected graph) jika untuk setiap pasang simpul* u *dan* v *di dalam himpunan* $V(G)$ *terdapat* *lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari u ke v). Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung (disconnected graph).*

Berdasarkan Definisi 2.10 dikatakan bahwa jika suatu graf G yang setiap pasang titiknya memiliki lintasan maka G merupakan graf terhubung. Begitu pula sebaliknya, jika suatu graf G dimana ada satu pasang simpul saja yang tidak memiliki lintasan, maka G merupakan graf tak terhubung. Diberikan Contoh 2.11 untuk lebih jelasnya.

Contoh 2.11 Diberikan Graf G dan H yang disajikan pada Gambar 2.6



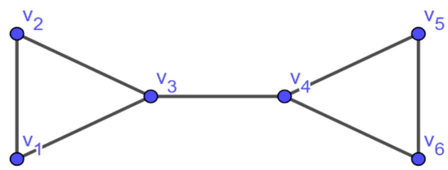
(a) **(b)**

Gambar 2.5 (a) Graf H dan (b) Graf I

Berdasarkan Gambar 2.5 (a) diperoleh lintasan $u_1 - u_3$ yaitu u_1, u_2, u_3 dan simpul u_1, u_2, u_4 saling bersisian, begitu pula dengan simpul u_4, u_2, u_3 juga saling bersisian, dan semua simpul yang bersisian pasti mempunyai lintasan. Oleh karena itu, graf H merupakan graf terhubung karena setiap pasang simpulnya mempunyai lintasan. Sedangkan dari Gambar 2.5 (b) diperoleh bahwa ada pasangan simpul yang tidak mempunyai lintasan, misalnya lintasan $v_1 - v_5$. Oleh karena itu, graf I merupakan graf tidak terhubung. Selanjutnya dibahas tentang diameter suatu graf yang disajikan dalam Definisi 2.12.

Definisi 2.12 (Chartrand dan Lesniak, 1996) *Diameter suatu graf G adalah jarak terbesar untuk setiap dua simpul pada graf G. Diameter graf G dinotasikan dengan $diam\ (G)$ dan jarak dari simpul u ke simpul v dinotasikan $d(u, v)$.*

Contoh 2.13 Diberikan sebuah graf G seperti Gambar 2.6



Gambar 2.6 Jarak simpul pada graf G

Berdasarkan Gambar 2.6 diperoleh jarak dari dua simpul pada grag G yang disajikan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Jarak setiap pasang simpul pada G_6

Jarak						
Simpul	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	$-$	1	1	2	3	3
v_2	1	$-$	1	2	3	3
v_3	1	1	$-$	1	2	2
v_4	2	2	1	$-$	1	1
v_5	3	3	2	1	$-$	1
v_6	3	3	2	1	1	$-$

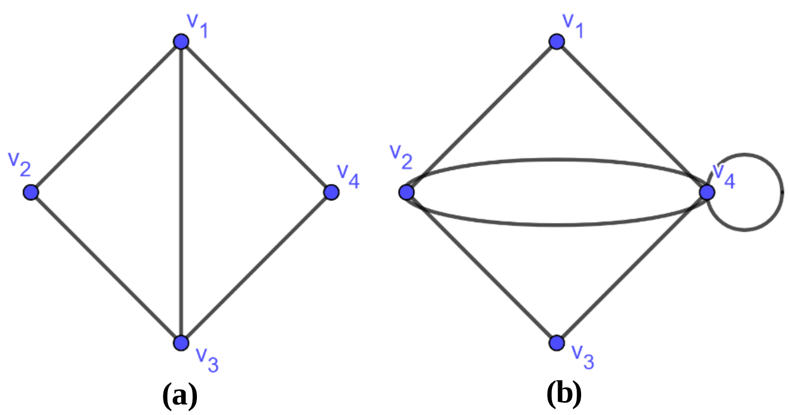
Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh maksimum dari setiap pasang titik di G_6 adalah 3, jadi $diam\ (G_6) = 3$. Berikutnya dijelaskan mengenai jenis-jenis graf yang disajikan pada subbab 2.2.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Pada subbab ini dibahas beberapa graf yaitu graf sederhana, graf tak sederhana, graf berarah, graf tak berarah, graf lengkap, graf null, graf *cycle*, graf roda, graf *gear* dan graf berganda pada graf roda maupun graf *gear*.

Definisi 2.14 (Daniel dan Prida, 2019) *Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki gelang dan sisi ganda. Gelang adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu* *simpul dengan dirinya sendiri dan sisi ganda adalah jika dua simpul yang dihubungkan lebih dari satu sisi. Graf tidak sederhana/multigraph adalah graf yamg memiliki gelang dan atau sisi ganda.*

Diberikan ilustrasi dari Definisi 2.14.

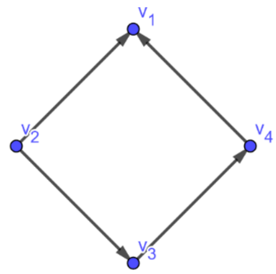


Gambar 2.7 (a) Graf sederhana (b) Graf tidak sederhana

Berdasarkan Gambar 2.7 (a) tidak ada satu sisi pun yang memiliki gelang maupun sisi ganda sehingga bisa disebut graf sederhana, sedangkan pada Gambar 2.7 (b) terdapat simpul u_2 dan u_4 yang dihubungkan oleh dua buah sisi berbeda sehingga graf pada Gambar 2.7 (b) memiliki gelang dan sisi ganda artinya graf pada Gambar 2.7 (b) merupakan graf tak sederhana.

Definisi 2.15 (Daniel dan Prida, 2019) *Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak memiliki orientasi arah. Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.*

Graf pada Gambar 2.7 adalah contoh graf tak berarah sedangkan graf berarah disajikan pada Gambar 2.8

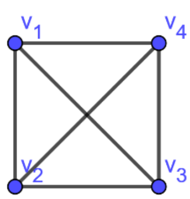


Gambar 2.8 Graf Berarah (G_4)

Graf pada Gambar 2.9 semua sisinya diberi orientasi arah. Sisi dari simpul v_2 dan simpul v_4 diarahkan ke simpul v_1, sisi dari v_2 diarahkan ke v_3 dan sisi dari simpul v_3 diarahkan ke v_4.

Definisi 2.16 (Daniel dan Prida, 2019) *Graf lengkap adalah graf sederhana dimana setiap pasang simpul yang berbeda terhubung oleh sebuah sisi. Graf lengkap dengan* n *buah simpul dilambangkan dengan* K_n. *Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari* n *buah simpul adalah* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Diberikan ilustrasi dari Definisi 2.16.

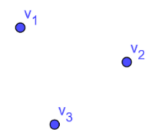


Gambar 2.9 Graf *Cycle* (C_4)

Pada Gambar 2.9 terdapat graf dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dimana simpul v_1 bertetangga dengan v_2, v_3 dan v_4. Simpul v_2 bertetangga dengan v_1, v_3 dan v_4. Simpul v_3 bertetangga dengan v_1, v_2 dan v_4. Simpul v_4 bertetangga dengan v_1, v_2 dan v_3. Artinya graf pada Gambar 2.10 merupakan graf lengkap.

Definisi 2.17 (Daniel dan Prida, 2019) *Graf kosong (Trivial) adalah graf yang tidak memiliki sisi.*

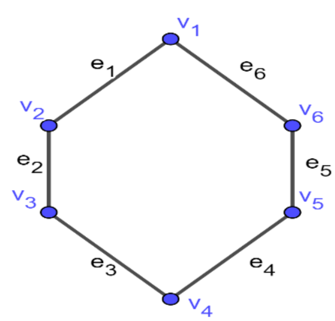
Diberikan ilustrasi dari Definisi 2.17.



Gambar 2.10 Graf kosong

Pada Gambar 2.10 terdapat suatu graf dengan dengan tiga simpul yang tidak dihubungkan oleh satupun sisi. Oleh karena itu, graf pada Gambar 2.10 merupakan graf kosong.

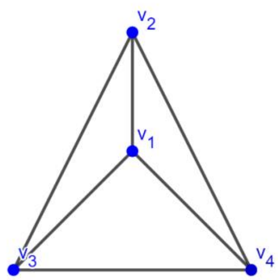
Definisi 2.18 (Munir, 2010) *Graf cycle merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf cycle dengan* n *simpul dilambangkan dengan* C_n*. Jika simpul-simpul pada* C_n *adalah* $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$*, maka sisi-sisinya adalah* $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$*. Dengan kata lain, ada sisi dari simpul terakhir* v_n *kesimpul awal* v_1.



Gambar 2.11 Graf C_6

Sebagai contoh dari graf *cycle* diperlihatkan Gambar 2.11. Berdasarkan Gambar 2.11 graf *cycle* C_6 adalah graf dengan himpunan simpul $V(C_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(C_6) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Setiap simpul pada graf *cycle* memiliki derajat 2.

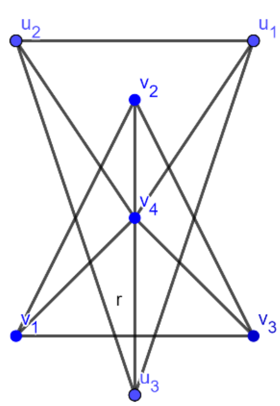
Definisi 2.21 (Rahmawati dan Rahajeng, 2014) *untuk* $n \geq 3$*, graf roda* (W_n) *merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul baru pada cycle* (C_n) *sedemikian hingga setiap simpul pada* C_n *terhubung langsung dengan* *simpul baru tersebut. Banyak simpul pada graf roda adalah $n + 1$ sedangkan banyak sisinya adalah $2n$. Bentuk graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.13*



Gambar 2.12 Graf Roda (W_3)

Pada Gambar 2.12 di sajikan graf roda (W_3) yang diperoleh dari graf *cycle* dengan cara menghubungkan simpul v_i, dimana $2 \leq i \leq 4$ dengan simpul v_1. Oleh karena itu graf pada Gambar 2.12 disebut graf roda.

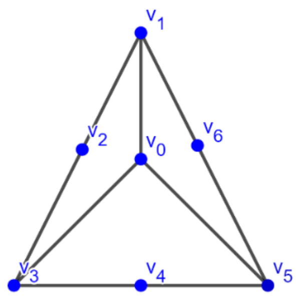
Definisi 2.20 (Bras dkk, 2013) *Graf berganda pada graf roda (DW_n) yang berukuran n yang terdiri dari dua cycle ($2C_n$) dimana simpul pada dua cycle terhubung langsung dengan simpul internal..*



Gambar 2.13 Graf (DW_3)

Berdasarkan Gambar 2.13 yang diperoleh dari dua graf *cycle* $(2C_n)$ dengan cara menghubung simpul u_i, v_i dengan $1 \leq i \leq 3$ dengan simpul v_4. Oleh karena itu graf pada Gambar 2.11 disebut graf berganda pada roda (DW_n).

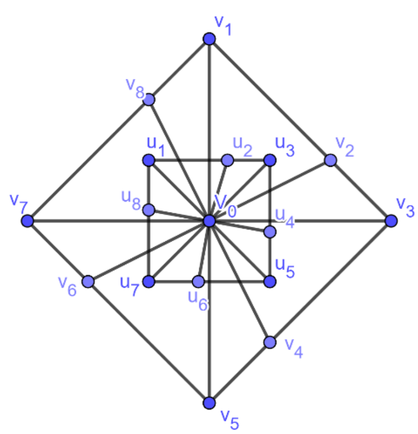
Definisi 2.21 (Ihwan & Rahmawati, 2014) *Graf gear adalah graf roda dengan tambahan satu simpul diantara tiap-tiap pasangan simpul pada cycle luar.*



Gambar 2.14 Graf Gear (J_n)

Pada Gambar 2.14 disajikan graf gear (J_n) yang diperoleh dari graf roda (W_n) dengan cara menambah satu simpul pada setiap pasangan simpul di *cycle* luar.

Definisi 2.22 (Rodriguez, 2018) *Graf berganda pada gear dilambangkan dengan* DJ_n*,graf berganda pada pada gear* (DJ_n) *dapat diperoleh dari double wheel graph* (DW_n) *dengan cara menambahkan simpul pada tiap pasangan simpul di* $2C_n$.



Gambar 2.15 Graf *double gear* (DJ_n)

Pada Gambar 2.15 diperoleh penambahan simpul pada graf *double wheel* yaitu pada simpul v_2, v_4, v_6, v_8 dan u_2, u_4, u_6, u_8 .

2.3 Pewarnaan Graf

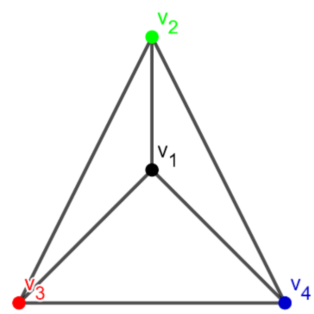
Pada subbab ini dibahas pewarnaan graf yang memiliki kasus dalam pemetaan. Pemetaan yang dimaksud adalah pemeetaan pada unsur graf yaitu simpul atau sisi. Pewarnaan graf yang dibahas yaitu pewarnaan simpul, bilangan kromatik, dan kelas warna. Penjelasan lebih lengkap akan disajikan dalam definisi-definisi berikut ini.

Definisi 2.23 (Chartrand dan Lesniak, 1986) *Misalkan* $G = (V(G), (E(G))$ *graf hingga dan terhubung. Didefinisikan pewarnaan simpul dari* G, *yaitu* $\alpha: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ *untuk suatu bilangan bulat n sedemikian sehingga untuk setiap dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda.*

Pada pewarnaan simpul graf G diperlukan banyak warna minimal dalam pewarnaan. Penejelasan lebih lengkap mengenai jumlah warna minimal diberikan pada Definisi 2.24.

Definisi 2.24 (Chartrand dan Zhang, 2009) *Bilangan kromatik dari graf* G *dinyatakan dengan* $\chi(G)$ *adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan simpul pada graf* G.

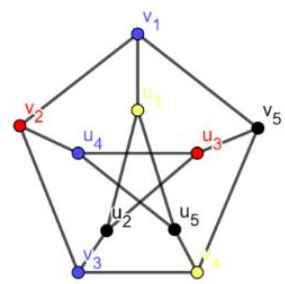
Sebagai ilustrasi diberikan graf $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\})$ dengan pewarnaan simpul seperti Gambar 2.12 pada simpul v_1, v_2, v_3 dan v_4 bertetangga satu sama yang lainnya sehingga setiap simpul memiliki warna yang berbeda, maka dari itu warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G sebanyak 4 warna.



Gambar 2.16 Graf Roda (W_3)

Definisi 2.25 (Chartrand dkk, 2002) *Misalkan C_i adalah himpunan simpul-simpul yang diberi warna i untuk $i = 1, \dots, k$ disebut dengan kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$.*

Sebagai ilustrasi diberikan sebuah graf G dengan pewarnaan simpul seperti Gambar 2.17.



Gambar 2.17 Pewarnaan Simpul pada Graf G

Berdasarkan Gambar 2.17 diperoleh pewarnaan pada setiap simpul dengan warna $i = 1$ pada simpul v_1, v_3, u_4, warna $i = 2$ pada simpul v_2, u_3, warna $i = 3$ pada simpul v_4, u_1, dan warna $i = 4$ pada simpul v_5, u_2, u_5 sehingga diperoleh kelas warna (C_i) yaitu:

$C_1 = \{v_1, v_3, u_4\}$, $C_2 = \{v_2, u_3\}$, $C_3 = \{v_4, u_1\}$, dan $C_4 = \{v_5, u_2, u_5\}$

Definisi 2.26 (Handayanto,2012) Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m $(a \equiv b \ (mod\ m))$ jika m habis membagi $(a - b)$, jika m tidak habis membagi $(a - b)$ maka dapat dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m $(a \not\equiv b \ (mod\ m))$.