BAB II
LANDASAN TEORI

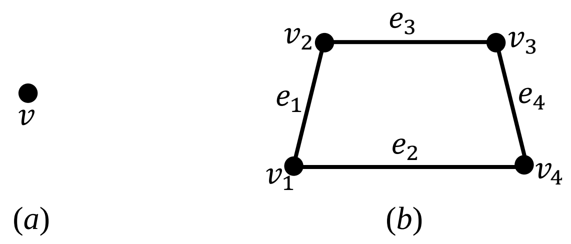
Pada bab ini dibahas mengenai graf, istilah-istilah dasar pada graf, pohon, pohon perentang maupun algoritma yang digunakan dalam penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf adalah suatu diagram yang terdiri dari sekumpulan titik atau simpul yang dihubungkan dengan sekumpulan garis atau sisi. Graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang memuat informasi tertentu. Beberapa contoh dari graf yaitu rute jalan, rangkaian listrik dan jaringan makanan. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Munir, 2010) ***Graf*** *G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ merupakan himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut simpul dan himpunan $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi, sedemikian sehingga setiap sisi dalam $E(G)$ menghubungkan simpul-simpul di $V(G)$.*

Definisi 2.1 menyatakan bahwa sebuah graf mempunyai paling tidak satu simpul dan memungkinkan untuk tidak mempunyai sisi. Graf yang mempunyai tepat satu simpul tanpa adanya sisi disebut dengan graf trivial, seperti yang terlihat pada Gambar 2.1 (*a*). Graf G terdiri dari himpunan simpul yang dilambangkan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi, dilambangkan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Sisi e yang menghubungkan sepasang simpul u dan v, dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$. Banyaknya simpul pada graf dinyatakan dengan $|V(G)| = n$ dan banyaknya sisi dinyatakan dengan $|E(G)| = m$. Sebagai contoh diketahui pada Gambar 2.1 (*b*) merupakan sebuah graf yang terdiri dari himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_4), e_3 = (v_2, v_3)$ dan $e_4 = (v_3, v_4)$, sehingga diperoleh $n = 4$ dan $m = 4$.



Gambar 2.1 (a) Graf Trivial dan (b) Graf G dengan 4 Simpul dan 4 Sisi

2.2 Istilah-Istilah Dasar pada Graf

Dalam teori graf terdapat istilah-istilah dasar yang digunakan yaitu bertetangga, bersisian, lintasan, siklus, terhubung dan graf berbobot. Penjelasan lebih lengkap diberikan Definisi 2.2.

Definisi 2.2 (Wilson, 2010) *Dua buah simpul u dan v pada graf G dikatakan* ***bertetangga*** *jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan keduanya. Simpul u dan v dikatakan* ***bersisian*** *dengan sisi tersebut. Selanjutnya dua buah sisi yang berbeda* ***bertetangga*** *jika keduanya bersisian dengan simpul yang sama.*

Pada Definisi 2.2 menyatakan bahwa jika sisi $e = (u, v)$, maka simpul u bertetangga dengan simpul v. Dengan kata lain, simpul u dan v bertetangga dikarenakan keduanya dihubungkan oleh sisi e. Selanjutnya sisi e bersisian dengan simpul u dan v. Lebih lanjut diberikan Contoh 2.1.

Contoh 2.3 Berdasarkan Gambar 2.1 (b), diperoleh bahwa simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2 dan v_4, simpul v_2 bertetangga dengan simpul v_1 dan v_3, simpul v_3 bertetangga dengan simpul v_2 dan v_4, dan simpul v_4 bertetangga dengan simpul v_1 dan v_3. Selanjutnya simpul v_1 dan v_2 bersisian dengan sisi e_1, simpul v_1 dan v_4 bersisian dengan sisi e_2, simpul v_2 dan v_3 bersisian dengan sisi e_3, dan simpul v_3 dan v_4 bersisian dengan sisi e_4. Kemudian sisi e_1 bertetangga dengan sisi e_2 dan e_3, sisi e_2 bertetangga dengan sisi e_1 dan e_4, sisi e_3 bertetangga dengan sisi e_1 dan e_4, sisi e_4 bertetangga dengan sisi e_2 dan e_3.

Definisi 2.4 (Marsudi, 2016) ***Lintasan*** *$u - v$ pada graf G ialah barisan terurut dari simpul-simpul yang diawali dengan simpul u ke simpul tujuan v, dimana semua simpul yang dilalui berlainan.*

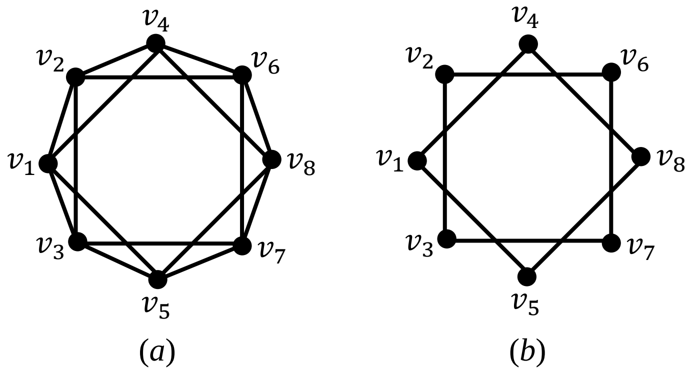
Pada Definisi 2.4 menyatakan bahwa sebuah lintasan dimulai dengan simpul awal dan berakhir pada simpul tujuan tanpa adanya pengulangan simpul yang sama. Sebagai contoh pada Gambar 2.1 (b) terdapat lintasan v_1, v_2, v_3, v_4, dan bukan merupakan lintasan yaitu v_1, v_2, v_3, v_2.

Definisi 2.5 (Munir, 2010) *Lintasan yang bermula dan berakhir dengan simpul yang sama disebut **siklus**.*

Berdasarkan Gambar 2.1 (b), diketahui bahwa pada lintasan v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 diawali dengan simpul v_1 dan diakhiri dengan simpul v_1. Sehingga lintasan tersebut merupakan sebuah siklus karena bermula dan berakhir pada simpul yang sama.

Definisi 2.6 (Marsudi, 2016) *Dua buah simpul u dan v pada graf G dikatakan **terhubung** jika terdapat lintasan dari u ke v. Lebih lanjut, graf G dikatakan **terhubung** jika setiap dua simpul berbeda pada graf G terhubung.*

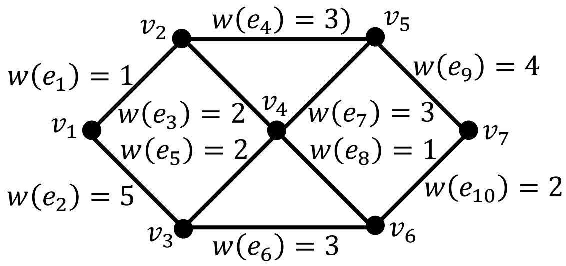
Pada Definisi 2.6 menyatakan bahwa setiap pasang simpul berbeda pada graf G yaitu simpul u dan v dihubungkan oleh lintasan $u - v$ sehingga G terhubung. Jika terdapat simpul yang tidak terhubung maka graf G disebut tidak terhubung. Graf terhubung dapat dilihat pada Gambar 2.2 (a). Sedangkan Gambar 2.2 (b) merupakan graf tak terhubung karena terdapat pasangan simpul v_1 dan v_2 yang tidak dihubungkan oleh lintasan $v_1 - v_2$.



Gambar 2.2 (a) Graf Terhubung dan (b) Graf Tak Terhubung

Definisi 2.7 (Munir, 2010) ***Graf berbobot*** *adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah nilai atau bobot.*

Nilai atau bobot setiap sisi pada suatu graf bergantung pada permasalahan yang dimodelkan menjadi graf. Bobot dapat digunakan untuk menyatakan jarak, biaya maupun waktu tempuh dari satu simpul ke simpul yang lain. Graf berbobot dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf Berbobot

2.3 Pohon

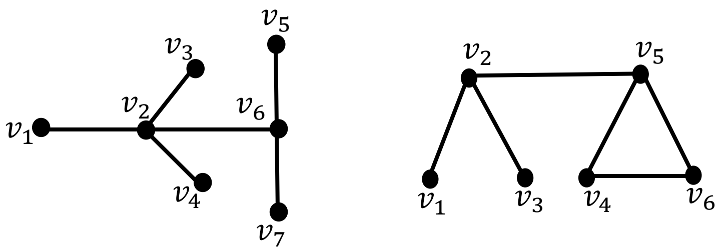
Pada subbab ini dibahas mengenai pohon dan sifat-sifat pohon. Pohon didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.8 (Asmiati, 2016) *Graf sederhana* $T = (V(T), E(T))$ *disebut* ***pohon (tree)*** *jika* T *terhubung dan tidak mengandung siklus.*

Berdasarkan Definisi 2.8 dapat diketahui bahwa pohon merupakan suatu graf terhubung yang setiap simpulnya hanya dapat dihubungkan oleh lintasan tertentu sehingga tidak membentuk siklus. Misalkan T adalah sebuah graf dengan n simpul, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen (Wilson, 2010):

1. T adalah pohon.
2. T tidak mengandung siklus
3. T terhubung dan memiliki $n - 1$ sisi
4. T terhubung dan setiap sisinya merupakan sebuah jembatan (jembatan adalah sisi yang apabila dihapus akan menyebabkan graf terbagi menjadi dua komponen)
5. Setiap dua simpul dalam T dihubungkan oleh satu buah lintasan
6. T tidak mengandung siklus dan penambahan setiap sisi baru akan membentuk sebuah siklus.

Untuk memahami lebih lanjut, diberikan Gambar 2.4 sebagai berikut.



(a) (b)

Gambar 2.4 Dua Graf dengan (a) Pohon dan (b) Bukan Pohon

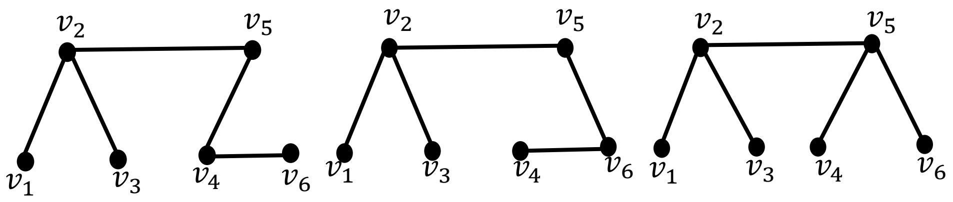
Gambar 2.4 (a) merupakan pohon sedangkan Gambar 2.4 (b) bukan merupakan pohon, hal ini dikarenakan terdapat siklus v_4, v_5, v_6, v_4.

2.4 Pohon Perentang

Pada subab ini dibahas mengenai pohon perentang. Penjelasan lebih lengkap diberikan Definisi 2.9.

Definisi 2.9 (Rosen, 2012) *T dikatakan* ***pohon perentang*** *dari graf G, jika T merupakan subgraf yang memuat semua simpul pada G.*

Pada Definisi 2.9 menjelaskan bahwa pohon perentang dari graf G adalah subgraf yang memuat semua simpul pada graf G dan sisi-sisi pada pohon perentang merupakan sisi-sisi yang terdapat pada graf G. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung tak berarah yang bukan merupakan pohon, dalam hal ini G mengandung siklus. Graf G dapat dibentuk menjadi pohon $T = (V(T), E(T))$ dengan cara menghapus sisi pada siklus yang terdapat pada G. Untuk membentuk pohon perentang, mula-mula dipilih sebuah siklus pada G. selanjutnya, hapus sebuah sisi pada siklus yang dipilih, maka G tetap terhubung dan jumlah siklusnya berkurang satu. Lakukan proses tersebut secara berulang sampai dengan semua siklus pada graf G hilang, sedemikian sehingga G menjadi sebuah pohon T. Selanjutnya T disebut dengan pohon perentang, dimana T memuat semua simpul pada graf G dan sisi-sisi pada T merupakan sisi-sisi yang ada pada G. Dengan kata lain, $V(T) = V(G)$ dan $E(T) \subseteq E(G)$ (Munir, 2010). Sebagai ilustrasi dari Definisi 2.9 diberikan Gambar 2.5 sebagai berikut.



(a) (b) (c)

Gambar 2.5 (a), (b) dan (c) Pohon Perentang dari Gambar 2.4 (b)

Pada Gambar 2.4 (b) diketahui bahwa graf G mempunyai satu buah siklus yang melalui simpul v_4, v_5, v_6 dan v_4. Selanjutnya, dengan menghapus salah satu sisi pada siklus tersebut sehingga membentuk pohon perentang. Pada Gambar 2.5 diperoleh tiga buah pohon perentang.

Jika $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung tak berarah yang mempunyai bobot pada setiap sisinya, maka bobot pohon perentang T dari G dapat diartikan sebagai jumlah bobot semua sisi pada T. Dari semua pohon perentang pada G, dapat ditemukan pohon perentang yang mempunyai bobot minimum, yang selanjutnya disebut dengan pohon perentang minimum.

2.5 Algoritma Prim

Algoritma Prim adalah sebuah algoritma dalam teori graf untuk mencari pohon perentang minimum pada sebuah graf berbobot yang saling terhubung. Dengan kata lain, algoritma ini mencari subgraf yang membentuk sebuah pohon yang memuat semua simpul pada graf dimana bobot yang dihasilkan adalah minimum. Algoritma ini ditemukan pada tahun 1930 oleh seorang ahli matematika bernama Vojtech Jarnik, kemudian dikembangkan oleh Robert C.Prim pada tahun 1957 dan selanjutnya pada tahun 1959 disempurnakan oleh Edsger Djikstra. Oleh karena itu, algoritma ini sering disebut DJP (*Djikstra Prim Algorithm*), Algortima Jarnik atau Algoritma Prim-Jarnik.

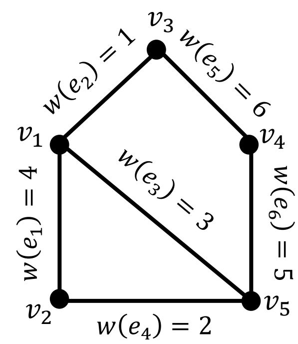
Dalam pencarian pohon perentang minimum, konsep algoritma Prim dimulai dengan himpunan yang kosong kemudian memilih satu simpul sembarang.

Misalkan graf G adalah graf berbobot dengan n simpul dan graf T adalah pohon perentang minimum yang akan dicari. Selanjutnya V adalah himpunan simpul, E adalah himpunan sisi dan m adalah jumlah sisi pada graf G. Secara umum algoritma Prim dituliskan sebagai berikut (Siang, 2012):

Langkah 1 Mula-mula $T = ((V(T), E(T))$ dengan $V(T) = \emptyset$ dan $E(T) = \emptyset$.
Langkah 2 Pilih sebarang simpul $v \in V(G)$. Tambahkan simpul v ke dalam $V(T)$.
Langkah 3 Untuk $m < n - 1$, lakukan:

a. Pilihlah sisi $e \in E(G)$ dengan syarat sisi e bersisian dengan satu simpul pada $V(T)$ dan e mempunyai bobot terkecil dibandingkan dengan semua sisi yang bersisian dengan simpul-simpul pada $V(T)$
b. Tambahkan sisi e ke dalam $E(T)$ dan simpul v ke dalam $V(T)$ dengan syarat sisi e pada $E(T)$ tidak membentuk siklus.

Untuk memahami lebih lanjut diberikan Contoh 2.10 yang menjelaskan proses pengerjaan pohon perentang minimum menggunakan algoritma Prim.

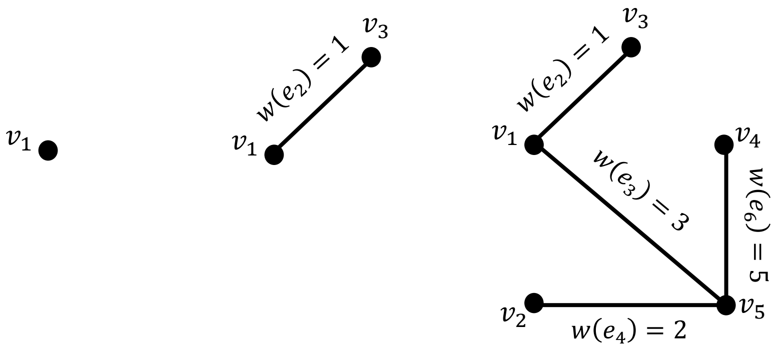


Gambar 2.6 Graf Berbobot dengan 5 Simpul dan 6 Sisi

Contoh 2.10 Misalkan graf G adalah graf awal seperti pada Gambar 2.6 dan T adalah pohon perentang minimum yang akan dicari.
Langkah 1 Mula-mula $T = ((V(T), E(T))$ dengan $V(T) = \emptyset$ dan $E(T) = \emptyset$. Selanjutnya pilih sebarang simpul $v \in V(G)$, dalam hal ini dipilih simpul v_1 pada graf G sehingga $v_1 \in V(T)$ dan seperti yang terlihat pada Gambar 2.7 (a).
Langkah 2 Pilih sisi $e \in E(G)$ yang bersisian dengan simpul v_1 dengan bobot terkecil. Terdapat tiga sisi yang bersisian dengan simpul v_1 yaitu e_1, e_2 dan e_3

dengan bobot berturut-turut adalah 4, 1 dan 3. Kemudian dipilih sisi $e_2 = (v_1, v_3)$ dengan bobot 1, sedemikian sehingga $e_2 \in E(T)$ dan $v_3 \in V(T)$, terlihat pada Gambar 2.7 (b).

Langkah 3 Tambahkan sisi dan simpul satu persatu pada $E(T)$ dan $V(T)$ selama penambahan sisi tersebut tidak membentuk siklus sampai dengan $m = n - 1$. Sedemikian sehingga diperoleh pohon perentang minimum dengan $E(T) = \{e_2, e_3, e_4, e_1, e_6, e_5\}$ dan $V(T) = \{v_1, v_3, v_5, v_2, v_4\}$ dengan bobot total sebesar 11, seperti yang terlihat pada Gambar 2.7 (c).

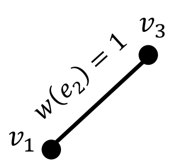


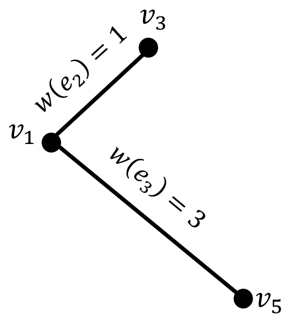
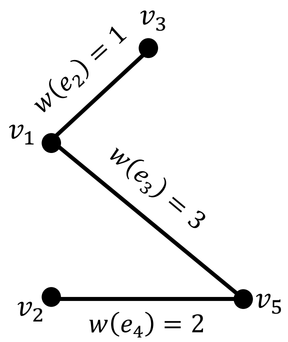
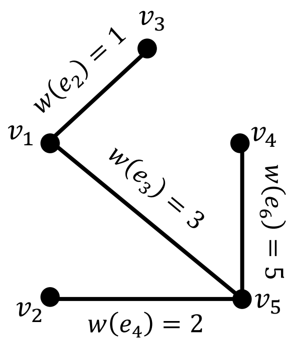
(a) (b) (c)

Gambar 2.7 (a), (b) dan (c) Graf Ilustrasi Langkah 1, 2 dan 3

Lebih lanjut, pengerjaan pohon perentang minimum dengan algoritma Prim dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1 Pengerjaan Pohon Perentang Minimum dengan Algoritma Prim

Iterasi	Sisi	Bobot	Pohon perentang
1	$e_2 = (v_1, v_3)$	1	

2	$e_3 = (v_1, v_5)$	4	
3	$e_4 = (v_5, v_2)$	6	
4	$e_6 = (v_5, v_4)$	11	

2.6 Matriks Graf

Pada subbab ini dibahas mengenai matriks ketetanggaan, matriks derajat dan matriks Laplacian. Lebih jelasnya diberikan Definisi 2.11.

Definisi 2.11 (Gross dan Yellen, 2006) ***Matriks ketetanggaan*** *dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks simetri yang entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dinyatakan dengan*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & jika\ v_i\ dan\ v_j\ bertetangga \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Pada Definisi 2.11 menyatakan bahwa matriks ketetanggaan dari suatu graf G dengan n simpul merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang memuat nilai 0 dan 1. Entri pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika simpul v_i terhubung langsung dengan simpul v_j serta bernilai 0 jika simpul v_i tidak terhubung langsung dengan simpul v_j.

Definisi 2.12 (Ocansey, 2015) *Misalkan G adalah sebuah graf, maka* ***matriks derajat*** *dari G dinotasikan dengan $D(G)$ dimana entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dinyatakan dengan*

$$a_{i,j} = \begin{cases} deg(v_i), & jika\ i = j \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Pada Definisi 2.12 menyatakan bahwa matriks derajat dari suatu graf G dengan n simpul merupakan matriks diagonal berukuran $n \times n$. Entri pada diagonal matriks menyatakan jumlah dari derajat dari simpul-simpulnya, dimana derajat dari suatu simpul menyatakan banyaknya sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Definisi 2.13 (Ocansey, 2015) *Diberikan G merupakan graf sederhana dengan matriks ketetanggaan A dan matriks derajat D, maka* ***matriks Laplacian*** *L didefinisikan sebagai selisih antara matriks derajat dan matriks ketetanggaan ($L = D - A$). Dengan kata lain entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dinyatakan dengan*

$$a_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i), & jika\ i = j \\ -1, & jika\ i \neq j\ dan\ (v_i, v_j) \in E \\ 0, & jika\ i \neq j\ dan\ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Pada Definisi 2.13 menyatakan bahwa matriks Laplacian adalah matriks yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggan.

2.7 Teorema Pohon Matriks

Teorema 2.14 *Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung berbobot dengan matriks ketetanggaan A dan matriks derajat D, banyaknya pohon* *perentang dari G dinotasikan dengan $\tau(G)$ adalah sama dengan nilai dari setiap kofaktor dari matriks Laplacian $L = D - A$ dari G.*

Pada Teorema 2.14 menyatakan bahwa banyaknya pohon perentang $\tau(G)$ adalah sama dengan nilai kofaktor dari matriks Laplacian dimana matriks Laplacian merupakan selisih antara matriks derajat dan matriks ketetanggaan ($L = D - A$). Pembuktian legkap dapat dipelajari pada (Ocansey, 2015).

Untuk memahami lebih lanjut diberikan Contoh 2.15 yang menjelaskan langkah dalam menentukan banyaknya pohon perentang pada suatu graf.

Contoh 2.15 Dengan menggunakan Teorema 2.14 akan ditentukan banyaknya pohon perentang pada graf dari Gambar 2.6.

Berdasarkan Gambar 2.6 diperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat sebagai berikut

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks Laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(G) = D(G) - A(G)$

$L(G) = D(G) - A(G)$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor C_{11} dari matriks Laplacian tersebut. Sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1^{1+1}) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1^{2})\ (a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14})$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(7) + 0 + 0 - 1(3)$$

$$= 14 - 3$$

$$= 11$$

Jadi banyaknya pohon perentang pada graf G adalah 11.