BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas dasar-dasar teori yang digunakan untuk menganalisis model matematika, pemodelan matematika udang windu dan mikroalga. Dasar-dasar teori tersebut meliputi persamaan diferensial, titik kesetimbangan, analisis titik kestabilan di titik kesetimbangan, teorema dan definisi yang berhubungan dengan analisis kestabilan, dan matriks *Jacobian.*

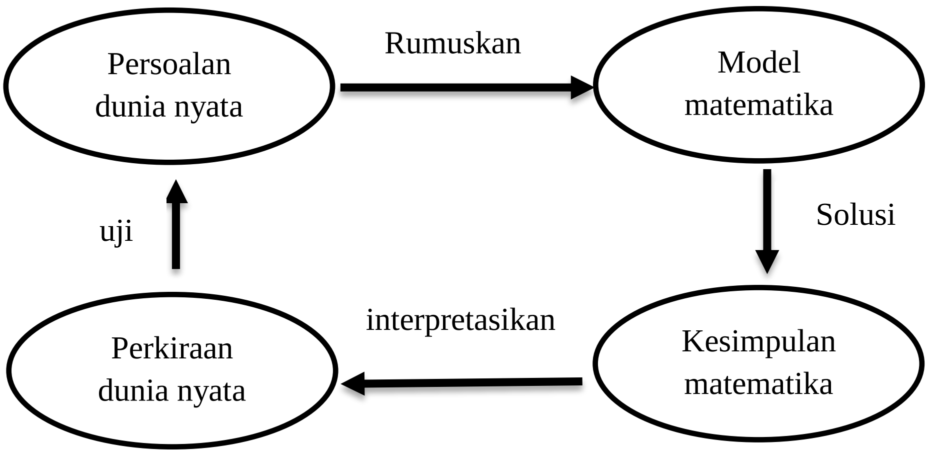
2.1 Model Matematika

Model matematika merupakan salah satu bentuk penerapan ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menginterpretasikan masalah pada dunia nyata ke dalam bentuk persamaan maupun pertidaksamaan matematika.

Berikut adalah beberapa langkah dalam menyusun model matematika yang digunakan sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah adalah mengidentifikasi apa yang dikerjakan atau diselesaikan. Pada langkah ini, dilakukan pengenalan variabel bebas dan tak bebas serta membuat asumsi-asumsi seperlunya untuk menyederhanakan fenomena sehingga membuatnya dapat ditelusuri secara matematika.
2. Merumuskan asumsi-asumsi dapat dilakukan dengan mengidentifikasi faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi model. Kemudian menentukan variabel bebas atau tak bebas berdasarkan dari hasil menyederhanakan faktor-faktor yang telah didapat sesuai dengan kebutuhan dengan melihat hubungan antara faktor yang satu dengan yang lainnya. Penerapan teori matematika yang telah diketahui pada model matematika yang telah dirumuskan guna mendapatkan kesimpulan matematikanya.
3. Pengambilan kesimpulan matematika dari asumsi yang telah diberikan, lalu menafsirkannya sebagai informasi yang berkaitan dengan permasalahan yang dimodelkan dengan cara memberikan penjelasan atau membuat perkiraan model tersebut.

4. Pengujian perkiraan terhadap data riil. Jika perkiraan yang dilakukan tidak sesuai dengan kenyataan, maka perlu formulasi model baru yang lebih baik dan memulai daur kembali. Bisa juga dengan memperbaiki asumsi-asumsi yang diberikan.



Gambar 2.1 Diagram alir pemodelan matematika (Prayudi,2006)

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Nugroho (2011) menyatakan persamaan diferensial (*differential equation*) merupakan persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya terhadap variabel-variabel bebas. Persamaan diferensial dibagi atas persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Sedangkan menurut Ayres (1992) persamaan diferensial biasa adalah sebuah persamaan diferensial yang terdiri dari satu atau lebih variabel terikat dengan satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial ialah persamaan-persamaan yang memuat turunan-turunan parsial. Berikut diberikan contoh persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Contoh 2.1 Persamaan diferensial.

a. Persamaan diferensial biasa

1. $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.1}$$

2. $$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = \sin x \tag{2.2}$$

b. Persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan (2.1) dan (2.2) adalah persamaan diferensial biasa karena hanya memuat satu variabel bebas yaitu x, sedangkan persamaan (2.3) adalah persamaan diferensial parsial karena memuat lebih dari satu variabel bebas yaitu s dan t.

Suatu persamaan diferensial biasa

$$F\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.4}$$

dikatakan linear jika *F* merupakan sebuah fungsi linear dari variabel $y, y', \dots, y^{(n)}$. Boyce & DiPrima (2009) bentuk umum persamaan diferensial biasa orde *n* adalah

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \tag{2.5}$$

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika memenuhi tiga hal berikut:

1. Variabel-variabel tak bebas dan turunannya berderajat satu,
2. Persamaan diferensial tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel tak bebas dengan variabel tak bebas lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan yang lainnya, atau variabel tak bebas dengan turunan,
3. Variabel tak bebas dan turunannya bukan merupakan fungsi transenden.

Ross (1984) menyatakan suatu persamaan diferensial biasa yang tidak memiliki bentuk pada Persamaan (2.5) maka persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial nonlinear. Apabila terdapat beberapa persamaan diferensial, maka akan membentuk suatu sistem persamaan diferensial. Perko (1991) menyatakan bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde pertama yang *non autonomous* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas, $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan turunan fungsi x_n terhadap t dan f_i dengan $(1,2,\ldots,n)$ adalah fungsi yang tergantung pada variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan t (Boyce & DiPrima, 2009). Sistem Persamaan diferensial (2.6) dapat ditulis sebagai:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t,x) \tag{2.7}$$

Jika $x(t)$ merupakan variabel tak bebas dengan variabel bebas t, $x'(t)$ atau $\dot{x}(t)$ adalah turunan dari $x(t)$ terhadap t dan $a(t)$ adalah koefisien dari $x(t)$, maka sistem dari n persamaan diferensial linear orde orde satu dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) = x'_1 &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\
\dot{x}_2(t) = x'_2 &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) = x'_n &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Sistem (2.8) dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\,x(t) + f(t) \tag{2.10}$$

Jika fungsi $f(t) = 0$, maka Sistem (2.10) dikatakan homogen yang dapat ditulis:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\,x(t) \tag{2.11}$$

Jika $f(t) \neq 0$, maka Sistem (2.10) disebut non homogen. Jika koefisien sistem merupakan konstanta, maka Sistem (2.11) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Sistem (2.12) dapat ditulis $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = Ax(t)$. Sistem persamaan diferensial tersebut akan ditentukan titik kesetimbangan dan kestabilannya dengan penjelasan sistem nonlinear.

2.3 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan (titik ekuilibrium) merupakan titik yang tidak berubah $f(x) = 0$. Dalam artian jika $t = 1,2, \dots, n$, maka nilai titik tersebut akan tetap atau tidak berubah. Berikut ini akan diberikan definisi titik kesetimbangan sebagai berikut:

Definisi 2.1 Perko (1991) Titik $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik ekuilibrium) dari suatu sistem persamaan diferensial yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f(x)}$ jika $f(\boldsymbol{x}^*) = 0$.

Diberikan sistem *autonomous*

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y) \tag{2.13}$$

Titik $(x^*, y^*) = 0$ disebut titik kesetimbangan, Persamaan (2.13). Titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ ini merupakan solusi dari Persamaan (2.13) yang bernilai konstan sebab $\dot{x} = 0$ dan $\dot{y} = 0$. Terdapat dua titik kesetimbangan dalam model matematika udang windu dan mikroalga, yaitu titik kesetimbangan udang windu dan titik kesetimbangan mikroalga.

Contoh 2.2 Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 2y - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = x - xy \tag{2.14}$$

Tentukan titik kesetimbangan dari sistem tersebut:

Jawab:

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan $\dot{x}$ dan $\dot{y} = 0$, maka Sistem (2.14)

$$2y - xy = 0$$
$$y(2 - x) = 0$$
$$x = 2 \text{ atau } y = 0$$

untuk $x = 2$, maka atau untuk $y = 0$, maka

$$x - xy = 0 \qquad\qquad x - xy = 0$$
$$2 - (2)y = 0 \qquad\qquad x - x(0) = 0$$
$$2y = 2 \qquad\qquad x = 0$$

$$y = 1$$

Didapat titik kesetimbangan dari Sistem (2.13) adalah $(\dot{x}, \dot{y}) = (2,1)$ atau $(0,0)$.

2.4 Linearisasi Sistem

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan melalui linearisasi. Linearisasi merupakan proses membawa sistem nonlinear ke sistem linear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Ross (2004) untuk mencari hasil linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear yaitu menggunakan matriks Jacobian.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

dengan *J* merupakan matriks Jacobian berukuran *m* x *n.*

Contoh 2.3 Diberikan Sistem (2.14) persamaan diferensial nonlinear yang mempunyai titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y}) = (2,1)$ atau $(0,0)$. Tentukan matriks Jacobian dari Sistem (2.14)

Jawab:

Matriks Jacobian dari Sistem (2.14) adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(2y - xy)}{\partial x} & \frac{\partial(2y - xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x - xy)}{\partial x} & \frac{\partial(x - xy)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & 2 - x \\ 1 - y & -x \end{bmatrix}$$

Diperoleh matriks Jacobian dari Sistem (2.14) adalah $\begin{bmatrix} -y & 2 - x \\ 1 - y & -x \end{bmatrix}$.

Untuk titik kesetimbangan $(x, y) = (2,1)$ dari Sistem (2.14) diperoleh matrik Jacobian.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Untuk titik kesetimbangan $(x, y) = (0,0)$ dari Sistem (2.14) diperoleh matrik Jacobian.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Jadi, diperoleh matrik Jacobian dari Sistem (2.14) pada titik kesetimbangan $(\dot{x}, \dot{y})$ $= (2,1)$ atau $(0,0)$ adalah $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ dan $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Sistem persamaan diferensial akan di analisis kestabilannya dengan melihat nilai eigen dan vektor eigennya.

2.5 Nilai Eigen

Nilai eigen digunakan untuk melihat perilaku solusi sistem ataupun jenis sifat kestabilan di titik kesetimbangan. Nilai eigen adalah nilai karakteristik dari suatu matriks berukuran $n\,x\,n$. Sementara vektor eigen adalah vektor kolom bukan nol yang bila dikalikan dengan suatu matriks berukuran $n\,x\,n$ akan menghasilkan vektor lain yang memiliki nilai kelipatan dari vektor eigen itu sendiri.

Definisi 2.3 Anton (1992) *Jika A adalah sebuah matriks $n\,x\,n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen (eigen vector) dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x , dan untuk suatu skalar sebarang λ berlaku:*

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x} \tag{2.18}$$

Skalar λ disebut nilai eigen (eigen value) dari A , dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait λ.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A berukukan $n\,x\,n$, maka persamaan (2.17) dapat ditulis:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda I \boldsymbol{x}$$

$$\lambda I - A = 0 \tag{2.19}$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (2.19) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.20}$$

Persamaan (2.19) disebut persamaan karakteristik (*characteristic equation*) matriks A. Skalar-skalar yang memenuhi Persamaan (2.19) adalah nilai-nilai eigen A (Anton, 1992).

Contoh 2.4 Tentukan nilai eigen dari matriks Jacobian pada Sistem (2.16) dan Sistem (2.17).

Jawab:

Untuk nilai eigen dari Sistem (2.16) sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) - 0 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \text{ dan } \lambda_2 = -2$$

Diperoleh dua nilai eigen Sistem (2.16), yaitu $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -2$.

Untuk nilai eigen untuk Sistem (2.17) sebagai berikut:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Sehingga didapat persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 = 2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Diperoleh dua nilai eigen Sistem (2.17), yaitu $\lambda_1 = \sqrt{2}$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

2.6 Kestabilan di Sekitar Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu λ_i, $i = 1,2,\dots,n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik.

Teorema 2.1 Subiono (2010) diberikan persamaan diferensial $\boldsymbol{x}^* = A\boldsymbol{x}$ dengan A adalah matriks berukuran $n\ x\ n$ memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $k \ \leq n$.

a. Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan stabil asimtotik, jika dan hanya jika $\Re e(\ \lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,k$.
b. Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan stabil, jika dan hanya jika $\Re e(\ \lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,k$.
c. Titik kesetimbangan dikatakan $\boldsymbol{x}^*$ tidak stabil, jika dan hanya jika $\Re e(\ \lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1,2,\dots,k$.

Berdasarkan Contoh 2.2 dan Contoh 2.4 dapat dilihat bahwa Teorema 2.1 disimpulkan bahwa diperoleh titik kesetimbangan (2,1) dan (0,0) dengan nilai eigen dari Sistem (2.16), yaitu $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -2$ adalah stabil asimtotik karena nilai $\Re e(\ \lambda_i) < 0$ dan nilai eigen Sistem (2.17), yaitu $\lambda_1 = \sqrt{2}$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ adalah tidak stabil dikarenakan $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Kestabilan disekitar titik kesetimbangan dapat dilihat pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Jenis-Jenis Kestabilan (Sumber: Boyce & DiPrima, 2009).

Nilai Eigen	Kestabilan
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil asimtotik
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Tidak stabil
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak stabil
λ_1, λ_2 kompleks $\Re e(\lambda_i) < 0$	Stabil asimtotik
λ_1, λ_2 kompleks $\Re e(\lambda_i) > 0$	Tidak stabil
λ_1, λ_2 kompleks $\Re e(\lambda_i) = 0$	Stabil