BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini berisi tentang dasar teori pendukung yang digunakan penulis sebagai landasan masalah dalam penelitian tugas akhir ini. Dasar teori pendukung dalam pembahasan penelitian ini yaitu persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial biasa orde satu, persamaan diferensial biasa orde dua, persamaan diferensial biasa homogen, dan persamaan diferensial biasa tak homogen dengan koefisien konstan.

2.1 Persamaaan Differensial Biasa

Persamaan diferensial biasa merupakan suatu persamaan yang hanya melibatkan satu variabel bebas (Nuryadi, 2018). Persamaan diferensial biasa menggunakan turunan biasa yaitu $\frac{dy}{dx}$. Persamaan diferensial biasa dapat diklasifikasikan berdasarkan jenis koefisiennya, yaitu koefisien konstan dan koefisien variabel. Persamaan diferensial biasa dibagi menjadi persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua, dan orde ke-n.

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial biasa orde satu adalah persamaan diferensial yang memuat turunan tertinggi, yaitu turunan tingkat satu. Diberikan persamaan diferensial biasa linear orde satu (Edwards, dan Panney 1996)

$$y'(x) + p(x)y = q(x) \tag{2.1}$$

$p(x)$ dan $q(x)$ merupakan fungsi kontinu pada selang I. Persamaan (2.1) memiliki solusi

$$y(x) = e^{\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx}\, q(x)dx.$$

Faktor pengintegral pada Persamaan (2.1) adalah,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Kalikan kedua ruas Persamaan (2.1) dengan $\mu(x)$ sehingga menjadi

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)\, p(x)y = \mu(x)\, q(x) \tag{2.2}$$

Ruas kiri pada Persamaan (2.2) merupakan turunan dari $\mu(x)y$, sehingga Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi,

$$\frac{d}{dx}\,(\mu(x)\,y(x)) = \mu(x)\,q(x). \qquad (2.3)$$

Kemudian integralkan kedua ruas pada Persamaan (2.3), didapat

$$\mu(x)\,y(x) = \int \mu(x)\,q(x)\,dx$$

$$y(x) = e^{\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx}\,q(x)dx \blacksquare$$

Sehingga Persamaan (2.2) menjadi

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)\,q(x) \qquad (2.3)$$

Integralkan kedua ruas pada Persamaan (2.3)

$$\mu(x)\,y = \int \mu(x)\,q(x)\,dx$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx}\,q(x)\,dx.$$

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

Persamaan diferensial biasa orde dua memiliki bentuk sebagai berikut

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \qquad (2.4)$$

dengan P, Q, R dan G adalah fungsi kontinu. Pada Persamaan (2.4) jika $G(x) = 0$ maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial biasa orde dua homogen. Jika $G(x) \neq 0$ maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial biasa tak homogen (Stewart, 2003)

2.2 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua dengan Koefisien Konstan

Bentuk persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan (Nuryadi, 2018)

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \qquad (2.5)$$

Misalkan $f(x) = 0$ dengan nilai $a, b,$ dan c adalah konstan, maka persamaan satu menjadi

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) merupakan bentuk umum dari persamaan diferensial biasa homogen orde dua karena ruas kanannya sama dengan nol. Jika ruas kanan tidak sama dengan nol maka Persamaan (2.7) disebut persamaan diferensial orde dua tak homogen. Misalkan $y = u$ dan $y = v$, u dan v merupakan fungsi x yang menjadi dua solusi dari Persamaan

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0 \tag{2.8}$$

dan

$$a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv = 0 \tag{2.9}$$

Kemudian jumlahkan Persamaan (2.8) dan Persamaan (2.9)

$$\left(a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu\right) + \left(a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv\right) = 0$$

Dengan menggunakan sifat asosiatif diperoleh

$$\left(a\frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(b\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx}\right) + (cu + cv) = 0$$

$$a\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) + c(u + v) = 0 \tag{2.10}$$

dimana

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

dan

$$\frac{d^2}{dx^2}(u + v) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}$$

Sehingga Persamaan (2.10) dapat ditulis

$$a\frac{d^2}{dx^2}(u + v) + b\frac{d}{dx}(u + v) + c(u + v) = 0.$$

Subsitusikan $y = u + v$

$$a\frac{d^2y}{dx} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

dan $y = u + v$, jika $a = 0$ maka Persamaan (2.10) menjadi Persamaan diferensial biasa orde satu.

$$b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

$$b\frac{dy}{dx} = -cy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{b}y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{b}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = ky = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

$$\frac{dy}{y} = -kdx$$

dimana $k = \frac{c}{b}$

Kemudian integralkan Persamaan (2.10)

$$\int \frac{dy}{y} = \int -kdx$$

maka didapat

$$\ln y = -kc + c$$

$$e^{lny} = e^{-kx+c}$$

$$y = e^{-kx+c} = e^{-kx}e^{c} = Ae^{-kx}.$$

Kemudian ganti $-k$ dengan m, sehingga

$$y = Ae^{mx} \tag{2.11}$$

Pada Persamaan (2.11) tidak hanya solusi untuk persamaan diferensial biasa orde satu, teteapi dapat menjadi solusi untuk persamaan diferensial biasa orde dua yaitu,

$$y = Ae^{mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = Ame^{mx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Am^2e^{mx}$$

Sehingga Persamaan (2.11) dapat ditulis

$$a\ Am^2e^{mx} + b\ Ame^{mx} + c\ Ae^{mx} = 0.$$

Kemudian bagi dengan Ae^{mx} sehingga didapat

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{2.12}$$

Merupakan persamaan kuadrat dengan akar-akar kuadratnya $m = m_1$ dan $m = m_2$. Diawal sudah dilihat jika $y = u$ dan $y = v$ dan $y = Be^{m_2x}$ maka solusi untuk persamaan diferensial biasa orde dua dapat ditulis

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}. \tag{2.13}$$

2.3 Integral

Integral adalah proses mendapatkan suatu fungsi jika turunan pertama fungsi tersebut diketahui. Mengintegralkan suatu fungsi $f(x)$ untuk menentukan fungsi $F(x)$ sedemikian sehingga $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Fungsi $F(x)$ dinamakan anti derivatif dari fungsi $f(x)$ (Nugroho, 2012). Integral dibagi menjadi dua macam, yaitu integral tentu dan integral tak tentu.

Definisi 1.1 Himpunan semua antiderivatif dari suatu fungsi $f(x)$ adalah integral tak tentu dari $f(x)$ terhadap x, dinotasikan sebagai berikut

$$\int f(x)dx.$$

Fungsi $f(x)$ dinamakan integran (yang diintegralkan) dan x dinamakan variabel integrasi.

Definisi 2.1 Diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ bagi interval menjadi n interval bagian dengan lebar sama, Δx, dan dari setiap interval bagian dipilih suatu titik x_i^*. Integral tentu untuk $f(x)$ dari a sampai b yaitu

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\ (x_i^*)\ \Delta x$$

2.4 Desmos

Desmos adalah kalkulator grafik berbasis web yang dapat diakses secara online dan gratis. Desmos berasal dari bahasa Yunani yang artinya ikatan. Seorang mahasiswa jurusan Matematika dan Fisika dari Universitas Yale bernama Eli Luberoff adalah pembuat platform Desmos. Pada tahun 2011 platform ini diluncurkan sebagai startup di konferensi TechCrunch's Disrupt New York.

Tampilan pada laman Desmos sangat menarik dan mudah untuk dioperasikan serta dilengkapi dengan fitur yang bergerak dan dapat digunakan dalam beberapa bahasa. Materi yang berkaitan dengan penggunaan Desmos anatara lain adalah fungsi linear, lingkaran, SPLDV, dan materi yang berhubungan dengan grafik lainnya. Desmos juga menawarkan beberapa jenis kalkulator lainnya seperi, *Scientific Calculator, Four Function Calculator, Matrix Calculator and Geometry Tool*. (Rahmadani, dkk 2022).