BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini memaparkan konsep-konsep yang mendukung bab pembahasan. Konsep-konsep tersebut berisi tentang dasar teori berupa subbab-subbab yang digunakan sebagai landasan pada masalah yang dikaji oleh penulis dalam penelitian di tugas akhir ini. Konsep tersebut meliputi persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial biasa orde satu, orde dua, persamaan diferensial homogen, dan persamaan diferensial biasa homogen dengan koefisien konstan.

2.1 Sejarah Singkat Perkembangan Persamaan Diferensial

Studi mengenai persamaan persamaan diferensial dimulai segera setelah penemuan Kalkulus dan Integral. Pada tahun 1676 Newton menyelesaikan sebuah persamaan diferensial dengan menggunakan deret tak hingga, sebelas tahun setelah penemuannya tentang bentuk fluksional dari kalkulus diferensial pada tahun 1665. Newton tidak mempublikasikan hal tersebut sampai dengan tahun 1693, pada saat Leibniz menghasilkan rumusan persamaan diferensial yang pertama (Nuryadi, 2018).

Perkembangan persamaan diferensial sangat pesat dalam tahun-tahun berikutnya. Dalam tahun 1694-1697 John Bernoulli menjelaskan "Metode Pemisahan Variabel" dan membuktikan bahwa persamaan diferensial homogen orde satu dapat direduksi menjadi bentuk persamaan diferensial dengan variabel-variabel yang dapat dipisahkan. John Bernoulli dan saudaranya Jacob Bernoulli (yang menemukan Persamaan Diferensial Bernoulli) berhasil menyederhanakan sejumlah besar persamaan diferensial menjadi bentuk yang lebih sederhana yang dapat mereke selesaikan (Nuryadi, 2018).

2.2 Pengertian Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyatakan antara suatu fungsi yang tidak diketahui, dengan satu atau lebih turunan dari fungsi tersebut (Wasilatul, dan Apriandi, 2018).

Persamaan diferensial dibagi menjadi 2 yaitu (Wasilatul, dan Apriandi, 2018):

1) Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial jika fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu peubah bebas dan hanya melibatkan satu variabel bebas.
2) Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih peubah/variabel bebas dan memuat turunan parsial dari fungsi yang tak diketahui.

2.3 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Definisi 2.1 (Nuryadi, 2018) Persamaan diferensial biasa orde satu dengan variabel tak bebas y dan variabel bebas x, dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{2.1}$$

Persamaan diferensial biasa orde satu dapat ditulis dalam bentuk diferensial menjadi

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0$$

sehingga diperoleh

$$M(x,y) = p(x)y - q(x), N(x,y) = 0$$

maka

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = p(x) \neq 0 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Jadi Persamaan (2.1) bukan persamaan diferensial eksak dan karena pada persamaan terakhir memuat hanya variabel x saja, maka dapat diasumsikan mempunyai faktor integral yang hanya tergantung x saja, misalkan $\mu(x)$, maka diperoleh

$$\mu(x)\big(p(x)y - q(x)\big)dx + \mu(x)dy = 0$$

Dengan mengingat definisi faktor integral diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)\big(p(x)y - q(x)\big)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)$$

$$\mu(x)p(x) = \frac{d\mu(x)}{dx} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial yang penyelesaiannya adalah

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Jelas $\mu > 0$, sehingga $\mu(x)$ merupakan faktor integral dari persamaan diferensial biasa orde satu sehingga

$$e^{\int p(x)dx}\big(p(x)y - q(x)\big)dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0$$

$$e^{\int p(x)dx}p(x)ydx - e^{\int p(x)dx}q(x)dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(e^{\int p(x)dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)ydx - e^{\int p(x)dx}q(x)) = 0$$

$$dy(e^{\int p(x)dx}) - e^{\int p(x)dx}q(x)dx = 0$$

$$ye^{\int p(x)dx} - \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx = 0$$

$$ye^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx.$$

Dari uraian Definisi (2.1) dapat disimpulkan dalam suatu teorema berikut:

Teorema 2.1 (Nuryadi, 2018). Diberikan persamaan diferensial biasa orde satu,

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \tag{2.3}$$

dengan $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan fungsi kontinu pada selang I dan Persamaan (2.3) mempunyai solusi

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}\, q(x)dx.$$

Bukti:

Misalkan $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ merupakan faktor integral dari Persamaan (2.3), maka kalikan $\mu(x)$ dengan $q(x)$ sehingga diperoleh

$$\mu(x)\big(y'(x) + p(x)y(x)\big) = e^{\int p(x)dx}q(x) \tag{2.4}$$

lalu dengan menggunakan prinsip turunan maka Persamaan (2.4) dapat ditulis yaitu,

$$d\left(e^{\int p(x)dx}y(x)\right) = e^{\int p(x)dx}q(x) \tag{2.5}$$

dan selanjutnya integralkan Persamaan (2.5) maka,

$$e^{\int p(x)dx}y(x) = \int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx$$

Jadi, solusi umum dari Persamaan (2.3), yaitu

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx\blacksquare.$$

2.4 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

Persamaan diferensial biasa orde dua merupakan sebuah fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q\,(x) \tag{2.6}$$

dengan f_0, f_1, f_2 dan Q adalah fungsi-fungsi kontinu dalam x yang didefenisikan pada domain dan $f_2(x) \neq 0$. (Faradillah dan Tsurayya, 2021)

Jika $Q(x) \neq 0$ pada Persamaan (2.6) maka Persamaan Diferensial (2.6) dinamakan persamaan diferensial biasa tak homogen orde 2. Jika $Q(x) = 0$ maka Persamaan (2.6) dinamakan persamaan diferensial homogen orde dua.

2.5 Persamaan Diferensial Biasa Homogen Orde Dua Koefisien Konstan

Persamaan diferensial biasa homogen orde dua dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum yaitu (Nuryadi, 2018) :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x), \text{ dengan } f(x) = 0 \tag{2.7}$$

Misalkan $f(x) = 0$, dengan nilai a, b, dan c konstan, maka Persamaan (2.7) menjadi

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.8}$$

Misalkan $y = u$ dan $y = v$, dimana u dan v adalah fungsi x yang menjadi dua solusi dari Persamaan (2.8)

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + +cu = 0 \tag{2.9}$$

dan

$$a\frac{d^2v}{dx^2}+b\frac{dv}{dx}+cv=0 \qquad (2.10)$$

tambahkan Persamaan (2.9) dan (2.10)

$$\left(a\,\frac{d^2u}{dx^2}+b\frac{du}{dx}+cu\right)+\left(a\,\frac{d^2v}{dx^2}+b\frac{dv}{dx}+cv\right)=0$$

$$\left(a\,\frac{d^2u}{dx^2}+a\frac{d^2v}{dx^2}\right)+\left(b\,\frac{du}{dx}+b\frac{dv}{dx}\right)+(cu+cv)=0$$

$$a\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx^2}\right)+b\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)+c(u+v)=0.$$

Karena

$$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

dan

$$\frac{d^2}{dx^2}(u+v)=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx^2},$$

maka Persamaan (2.8) dapat ditulis

$$a\frac{d^2}{dx^2}(u+v)+b\frac{d}{dx}(u+v)=0 \qquad (2.11)$$

Misalkan $y = u + v$ maka diperoleh

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \qquad (2.12)$$

Jika $a = 0$, maka Persamaan (2.12) menjadi persamaan diferensial biasa orde satu

$$b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{c}{b}y$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{c}{b}y=0$$

$$\frac{dy}{dx}+ky=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ky$$

$$\frac{dy}{y} = -kdx \tag{2.13}$$

dengan $k = \frac{a}{b}$.

Integralkan Persamaan (2.13)

$$\int \frac{dy}{y} = \int -kdx$$

$$ln\, y = -kx + c$$

$$e^{\ln y} = e^{-kx+c}$$

$$y = e^{-kx+c} = e^{-kx}e^{c} = Ae^{-kx}$$

Gantikan $-k$ dengan m, maka

$$y = Ae^{mx}. \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) tidak hanya solusi untuk persamaan diferensial orde satu tetapi juga bisa menjadi solusi untuk persamaan diferensial biasa homogen orde dua dimana

$$y = Ae^{mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = Ame^{mx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Am^2e^{mx}$$

Sehingga Persamaan (2.8) dapat ditulis

$$aAm^2e^{mx} + bAme^{mx} + cAe^{mx} = 0 \tag{2.15}$$

Karena $Ae^{mx} \neq 0$ untuk setiap $x \in R$ maka Persamaan (2.15) bagi dengan Ae^{mx} maka didapat

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.16}$$

Persamaan (2.16) disebut persamaan karakteristik jika $y = u$ dan $y = v$ adalah dua solusi untuk Persamaan (2.8) dengan m_1, m_2 adalah akar-akar dari Persamaan (2.16) dan juga $y = u + v$. Jika $y = Ae^{m_1x}$ dan $y = Be^{m_2x}$ maka solusi untuk Persamaan (2.8) dapat ditulis

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}\ .$$

Solusi persamaan diferensial biasa homogen orde dua sangat tergantung dari jenis akar-akar persamaan karakteristik. Ada tiga jenis solusi untuk persamaan diferensial biasa homogen orde dua, yaitu (Tazi, 2008) :

1. Jika akar r_1 dan r_2 dua-duanya adalah real dan beda, dengan $a^2 - 4b > 0$. Sehingga solusi umumnya yaitu:
$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$
2. Jika akar r_1 dan r_2 kembar atau $r_1 = r_2$ dengan $a^2 - 4b = 0$ maka solusi umumnya adalah:
$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$
$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{rx}$$
3. Jika r_1 dan r_2, merupakan pasangan akar bilangan kompleks dengan $a^2 - 4b < 0$. Maka akar-akar dari persamaan $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ harus muncul dalam pasasangan konjugat. Jadi solusi umumnya adalah :
$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$