

BAB II
KINEMATIKA, Matrik Jacobian,
METODE PSEUDO INVERSE DAN MANIPULABILITAS

2.1 Manipulator

2.1.1 Definisi Robot

Robot berasal dari kata “robota” yang dalam bahasa Ceko yang berarti budak, pekerja atau kuli. Pertama kali kata “robota” diperkenalkan oleh Karel Capek dalam sebuah pentas sandiwara pada tahun 1921 yang berjudul RUR (Rossum’s Universal Robot). Pentas ini mengisahkan mesin yang menyerupai manusia yang dapat bekerja tanpa lelah yang kemudian memberontak dan menguasai manusia. Istilah “robot” ini kemudian mulai terkenal dan digunakan untuk menggantikan istilah yang dikenal saat itu yaitu automation. Robot pertama kali dikembangkan oleh *Computer Aided Manufacturing-International* (CAM-1), “robot adalah peralatan yang mampu melakukan fungsi-fungsi yang biasa dilakukan oleh manusia atau peralatan yang mampu bekerja dengan intelegensi yang mirip dengan manusia”. Perkembangan robot tidak hanya pada kecanggihan rancangan mekaniknya saja, melainkan juga sistem kendalinya menggunakan sistem komputerisasi. Seiring dengan berkembangnya teknik pemrograman robot, maka semakin mempermudah manusia untuk membuat robot yang memiliki kecerdasan yang mengikuti kehendak serta kemauan dari manusia itu sendiri.

Ada banyak definisi yang dikemukakan oleh para ahli mengenai robot. Orang awam beranggapan bahwa robot mengandung pengertian suatu alat yang menyerupai manusia, namun struktur tubuhnya tidak menyerupai manusia melainkan terbuat dari logam. Beberapa ahli robotika berupaya memberikan beberapa definisi, antara lain:

1. Menurut Robot *Institute of America* (1979), “Robot adalah sesuatu yang dapat di program ulang, dengan memiliki manipulator mekanik atau penggerak yang didesain untuk memindahkan barang-barang, komponen-komponen atau alat-alat

khusus dengan berbagai program yang fleksibel disesuaikan untuk melaksanakan berbagai macam tugas”.

2. Menurut ORJ (*Official Japanese*), “Robot adalah sebuah sistem mekanik yang mempunyai fungsi gerak analog untuk fungsi gerak organisme hidup, atau kombinasi dari banyak fungsi gerak dengan fungsi intelligent”.
3. Menurut Eugene (1976), Industri robot dibangun dari tiga sistem dasar:
 - a. Struktur mekanis yaitu sambungan-sambungan mekanis (*link*) dan pasangan-pasangan (*joint*) yang memungkinkan untuk membuat berbagai variasi gerakan.
 - b. Sistem kendali, dapat berupa kendali tetap (*fixed*) ataupun servo, yang dimaksud dengan sistem kendali tetap yaitu suatu kendali robot yang pengaturan gerakannya mengikuti lintasan (*path*), sedangkan kendali servo yaitu suatu kendali robot yang pengaturan gerakannya dilakukan secara point to point (PTP) atau titik pertitik.
 - c. Unit penggerak (aktuator), Seperti hidrolis, pneumatik, elektrik ataupun kombinasi dari ketiganya, dengan atau tanpa sistem transmisi. Torsi (*force*) dan kecepatan yang tersedia ada suatu aktuator diperlukan untuk mengendalikan posisi dan kecepatan. Transmisi diperlukan untuk menggandakan torsi. Seperti diketahui menambah torsi dapat menurunkan kecepatan, dan meningkatkan inersia efektif pada sambungan. Untuk mengurangi berat suatu sistem robot maka aktuator tidak ditempatkan pada bagian yang digerakkan, tetapi pada sambungan yang sebelumnya.

Berikut ini adalah beberapa penelitian sejenis yang sudah ada sebelumnya untuk menjadi referensi penyusunan skripsi:

1. Gina Fahrina (2013) dengan judul penelitian “*Optimalisasi Ukuran Manipulabilitas Robot Stanford Menggunakan Metode Pseudo-Inverse*”. Penelitian robot stanfor ini menggunakan ruang kerja tiga dimensi, sehingga lebih kompleks dalam penyelesaian invers kinematiknya. Selain itu, gerakan Robot Stanford akan lebih baik karena gerakannya dilihat dari tiga dimensi.

Lintasan yang digunakan pada penelitian ini pun menggunakan lintasan lingkaran, dimana lintasan lingkaran merupakan lintasan yang kompleks karena telah mencakup beberapa lintasan lain seperti lintasan titik, sinusoidal, maupun lintasan garis. Pada penelitian ini untuk mengoptimalkan ukuran manipulabilitas dengan memanfaatkan *redundancy* lebih besar dibandingkan dengan nilai ukuran manipulabilitas tanpa *redundancy*, ini berarti bahwa ukuran manipulabilitas pada robot stanford yang menggunakan *redundancy* lebih optimal dibandingkan dengan robot stanford yang tidak menggunakan *redundancy*. Sehingga dengan mengoptimalkan ukuran manipulabilitas, maka kemampuan sirobot untuk bergerak bebas pada daerah kerjanya akan semakin besar dan gerakan robot akan menjadi lebih efektif.

2. Suyudi (2019) dengan judul penelitian: “*Simulasi Penyelesaian Invers Kinematik Robot Dua Lengan dengan Metode Pseudo-Inverse*”. Pada penelitian ini penyelesaian invers kinematik robot dua lengan dengan metode *Pseudo-Inverse Jacobian* pada manipulator planar 5 DOF ini mengikuti beberapa lintasan yaitu lingkaran, garis vertical, dan garis horizontal. Dengan kondisi menampilkan robot lengan satu terlebih dahulu, kemudian robot lengan dua, atau langsung menampilkan robot dua lengan secara bersamaan. Pergerakan dari robot ini menampilkan dalam bentuk *stick picture*. Dimana menunjukkan perubahan konfigurasi dari tiap-tiap *link* manipulator pada setiap gerakannya.
3. Elang Dardian Marindani (2011) dengan judul penelitian: “*Pengaruh Pembatasan Sudut Joint Terhadap Kinerja Manipulator Planar*”. Pada penelitian ini yaitu untuk mengetahui seberapa besar pengaruh pemanfaatan *redundancy* dan pembatasan sudut *joint* pada ukuran manipulabilitas manipulator planar *redundant* dengan 3 derajat kebebasan dengan trayektori lingkaran. Pada penelitian ini dilakukan empat macam simulasi:
 - 1). Simulasi tanpa memanfaatkan *redundancy* dan mengabaikan adanya pembatasan sudut *joint*.

- 2). Simulasi tanpa memanfaatkan *redundancy* dan dengan memperhitungkan adanya pembatasan sudut *joint*.
- 3). Simulasi dengan memanfaatkan *redundancy* dan dengan mengabaikan adanya pembatasan sudut *joint*.
- 4). Simulasi dengan memanfaatkan *redundancy* dan dengan memperhitungkan adanya pembatasan sudut *joint*.

Dari keempat macam simulasi ini dapat dikatakan bahwa manipulator *redundant* yang memanfaatkan *redundancy* dan memperhitungkan adanya syarat pembatasan sudut setiap *joint* akan lebih realistis dalam kondisi *real time* walaupun ukuran manipulabilitas manipulator *redundant* yang memanfaatkan *redundansi* dan mengabaikan adanya pembatasan sudut *joint* lebih optimal.

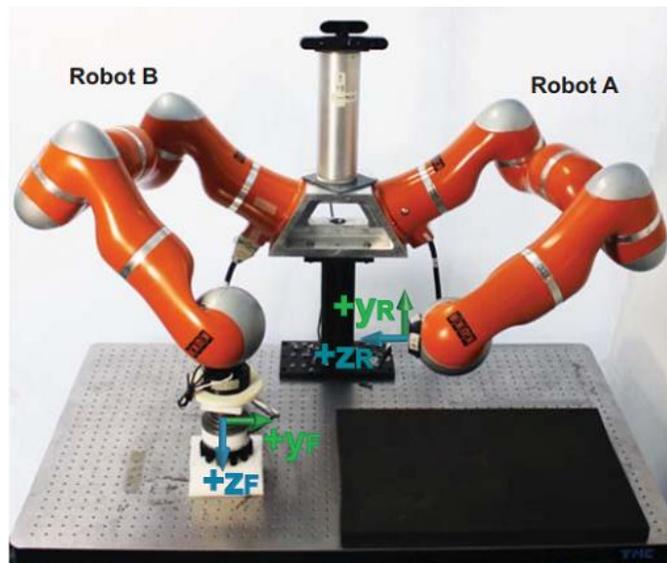
4. Agus Budi Dharmawan (2017) dengan judul penelitian: “*Penerapan Metode Denavit- Hartenberg Pada Perhitungan Inverse Kinematics Gerakan Lengan Robot*”. Pada penelitian ini dirancang aplikasi yang menggunakan metode *Denavite-Hartenberg* untuk menghitung sudut-sudut tiap sendi pada *invers kinematics* untuk menggerakkan sebuah lengan robot. Matrik *Denavite-Hartenberg* yang berisi perhitungan rotasi dan translasi digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai sudut untuk menggerakkan motor sendi. Pencarian posisi dari ujung lengan sebuah robot manipulator menjadi lebih mudah dan cepat serta efisien dengan menggunakan aplikasi yang menggunakan metode *inverse kinematics Denavite-Hartenberg*.
5. Dwi Fransiskus Febriyanto (2008) dengan judul penelitian: “*Pengaruh Pemanfaatan Redundancy Terhadap Optimalisasi Ukuran Manipulabilitas Pada Manipulator Planar Redundant Menggunakan Metode Pseudo-Inverse*”. Pada penelitian ini menggunakan manipulator planar dengan 4 derajat kebebasan (*Degree Of Freedom/DOF*) Bergerak mengikuti bentuk lintasan berupa lingkaran, garis horizontal, garis vertical dan polinomial. Invers kinematik pada penelitian ini di pengaruhi oleh adanya *redundancy*, dan ingin mengetahui seberapa besar pengaruh *redundancy* terhadap

optimalisasi ukuran manipulabilitas manipulator planar *redundant* yang menggunakan metode *Pseudo-Inverse Jacobian*.

Penelitian kali ini adalah tentang Pengaruh Manipulabilitas Pada Manipulator Robot Dua Lengan Terhadap Gerak Lintasan Dengan Menggunakan Metode *Pseudo-Inverse*. Dengan simulasi ini untuk mengoptimalkan ukuran manipulabilitas pada suatu manipulator robot dua lengan adalah dengan memanfaatkan redundansi. Optimalisasi ukuran manipulabilitas dapat diartikan juga dengan memaksimalkan ukuran tersebut. Jadi dengan memasukkan redundansi kedalam persamaan invers kinematiknya akan dapat meningkatkan ukuran manipulabilitas manipulator tersebut.

2.1.2 Model manipulator robot dua lengan

Untuk menganalisis kinematika maju dibuat model pada Gambar 2.1



Gambar 2.1. Model robot dua lengan

Sumber: (Rodrigo S. 2015)

Pada Gambar 2.1 adalah contoh model gambar manipulator robot dua lengan yang disebut dengan manipulator lengan ganda KUKA, dimana pada robot ini lengan kanan (robot B) *end-effector* memegang pahat, sedangkan lengan kiri (robot A) *end-effector* adalah referensi *end-effector*.

2.2 Kinematika

Kinematika merupakan studi tentang gerak benda tanpa memperhitungkan penyebab terjadi gerakan itu. Asumsinya objek sebagai benda titik yaitu ukuran, bentuk, rotasi dan getarnya diabaikan. Sedangkan kinematika untuk manipulator *planar* adalah gerakan lengan robot terhadap sistem koordinat dasar dua dimensi dengan tidak menghitung gaya dan momen yang menyebabkan gerakan pada *link* robot tersebut (Sciavicco, 1996:19). Kendali kinematika ini terdiri dari 2 cakup masalah, yaitu *Direct Kinematics* (kinematik maju) dan *Inverse Kinematics* (invers kinematik), dimana:

1. Kinematika maju merupakan salah satu solusi dari kinematika manipulator untuk mendapatkan posisi dan orientasi dari *end-effector* dari manipulator dengan diberikannya koordinat-koordinat dan sudut-sudut dari *joint* manipulator lengan robot tersebut.
2. Invers kinematik merupakan kebalikan dari kinematika maju yaitu untuk mendapatkan koordinat dan sudut-sudut dari *joint* manipulator lengan robot tersebut dengan diberikannya posisi dan orientasi dari *end-effector* manipulator tersebut.

2.3 Kinematika redundansi

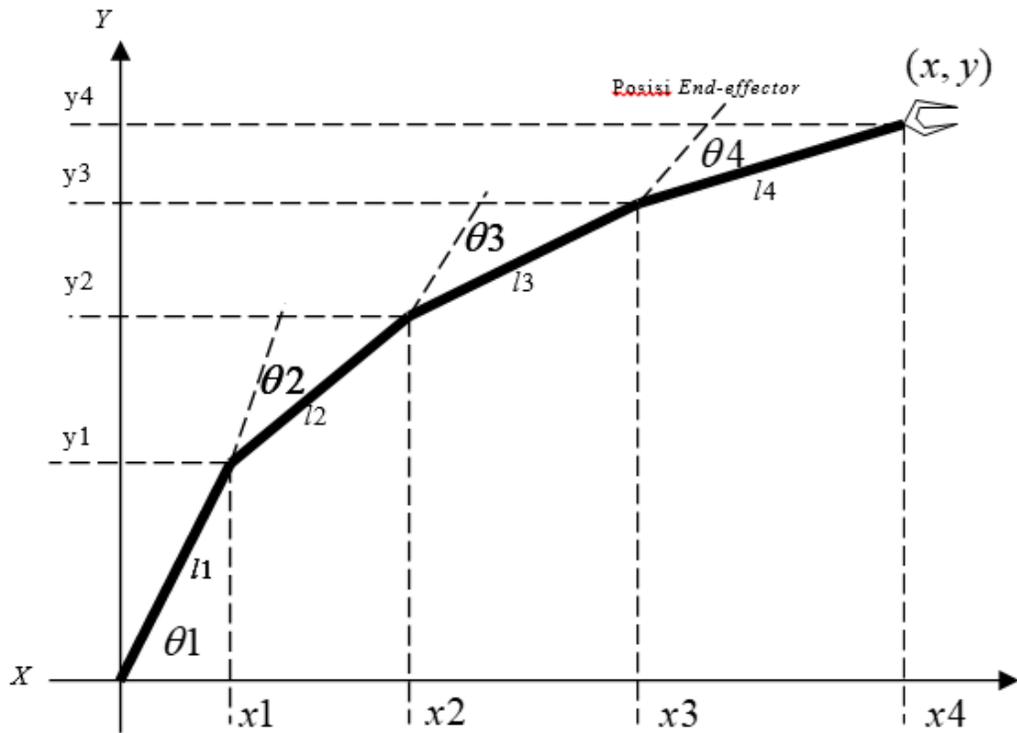
Manipulator menurut fungsinya dapat dibagi menjadi manipulator redundant dan manipulator nonredundant. Dikatakan manipulator nonredundant ketika jumlah derajat kebebasan (*Degree of Freedom*) sama dengan jumlah variabel yang diperlukan untuk menguraikan tugas yang diberikan atau ditentukan. Sebaliknya manipulator dikatakan redundant (*kinematically redundant*) adalah ketika jumlah derajat kebebasan lebih besar dibandingkan jumlah variabel yang diperlukan untuk

menguraikan tugas yang diberikan atau yang ditentukan. Dengan acuan pada ruang sebuah manipulator dikatakan redundant ketika dimensi dari ruang operasionalnya m lebih kecil dibanding dengan dimensi dari ruang joint n ($m < n$). Redundansi merupakan konsep yang berhubungan dengan tugas kepada manipulator, dimana suatu manipulator dapat menjadi redundant berkenaan dengan suatu tugas yang diberikan. Bahkan pada kasus $m=n$, suatu manipulator dapat secara fungsional redundant ketika jumlah atau komponen dari ruang operasional (r) menjadi perhatian untuk tugas yang spesifik, dengan $r=m$.

Suatu contoh manipulator planar dengan tiga derajat kebebasan seandainya posisi end effector ditetapkan, struktur ini menyajikan suatu fungsional redundant ($n = m = 3, r = 2$), ini hilang ketika orientasi end effector juga ditetapkan ($n = m = r = 3$), maka untuk manipulator planar dengan empat derajat kebebasan pada hakikatnya adalah redundant dengan ($n = 4, m = 3$).

2.4 Manipulator Planar dengan 4 Derajat Kebebasan

Manipulator planar merupakan salah satu contoh dari berbagai macam manipulator. Manipulator planar sering kali digunakan untuk keperluan penelitian dan pengembangan dalam ilmu robotika. Pada gambar 2.2 menunjukkan sebuah model atau struktur dari manipulator planar dengan 4 derajat kebebasan (DOF). Dimana panjang tiap ruas (link) manipulator adalah $l_1, l_2, l_3,$ dan l_4 . Dengan variabel sudut tiap-tiap joint adalah θ yang terdiri dari $\theta_1, \theta_2, \theta_3,$ dan θ_4 . Manipulator planar bergerak dalam bidang dua dimensi yaitu dalam koordinat x dan y . Contoh gambar fisik dari manipulator planar dalam koordinat x dan y diperlihatkan pada Gambar 2.2.

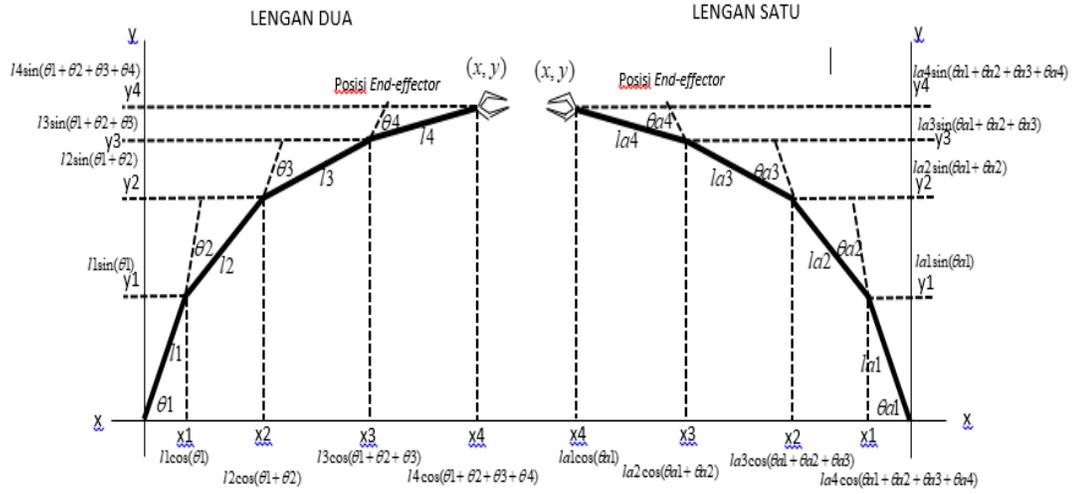


Gambar 2.2 Fisik Manipulator *Planar*

Dari penjelasan diatas manipulator *planar* banyak digunakan untuk keperluan penelitian dan pengembangan ilmu robotika. Sehingga banyak peneliti yang ingin mengembangkan robot ini dengan menggunakan berbagai metode dan dengan lebih banyak lagi lengan yang digunakan, contohnya pada kali ini menggunakan robot dua lengan.

2.5 Kinematika Manipulator *Planar* Robot Dua Lengan dengan 4 DOF

Pada Gambar 2.3 menunjukkan struktur kinematika suatu manipulator planar dengan 4 derajat kebebasan (DOF). Dimana panjang link (l) masing-masing adalah l_1, l_2, l_3 dan l_4 . Dan variabel sudut untuk masing-masing *joint* adalah dengan simbol $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dan θ_4 .



Gambar 2.3 Kinematika Manipulator *Planar* Robot Dua Lengan 4 DOF

Untuk sumbu x pada lengan satu masing-masing adalah:

$$x_0 = l_0 \cos(\theta_0) \quad (2.1)$$

$$x_1 = l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_0 + \theta_1)$$

$$x_2 = l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_0 + \theta_1) + l_2 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)$$

$$x_3 = l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_0 + \theta_1) + l_2 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$x_4 = l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_0 + \theta_1) + l_2 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ + l_4 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

Untuk sumbu y pada lengan satu masing-masing adalah:

$$y_0 = l_0 \sin(\theta_0) \quad (2.2)$$

$$y_1 = l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_0 + \theta_1)$$

$$y_2 = l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_0 + \theta_1) + l_2 \sin(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)$$

$$y_3 = l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_0 + \theta_1) + l_2 \sin(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y_4 = l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_0 + \theta_1) + l_2 \sin(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ + l_4 \sin(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

Kemudian pada lengan dua sama seperti kinematika pada lengan satu, yang membedakan pada lengan dua ini adalah sudutnya $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ dan θ_4 . ini dikarenakan perbedaan gerakan yang dilakukan oleh lengan satu dan lengan dua untuk melakukan *tracking* lintasan yang sudah ditentukan.

Apabila:

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= \theta_0 \\
 \theta_{01} &= \theta_0 + \theta_1 \\
 \theta_{012} &= \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 \\
 \theta_{0123} &= \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\
 \theta_{01234} &= \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Maka persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= l_0 \cos(\theta_0) \\
 x_1 &= l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) \\
 x_2 &= l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) \\
 x_3 &= l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) \\
 x_4 &= l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234})
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 y_0 &= l_0 \sin(\theta_0) \\
 y_1 &= l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) \\
 y_2 &= l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) \\
 y_3 &= l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) \\
 y_4 &= l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234})
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Untuk mendapatkan posisi koordinat *end-effector* dapat dihitung sebagai berikut:

Koordinat joint I : (x_0, y_0)

Koordinat joint II : (x_1, y_1)

Koordinat joint III : (x_2, y_2)

Koordinat joint IV : (x_3, y_3)

Koordinat joint V : (x_4, y_4)

sehingga didapatkan koordinat dari *end-effector* sebagai berikut:

$$(x_4, y_4) = ((l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234})), \\ (l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234}))) \quad (2.6)$$

2.6 Formulasi Kinematika Langsung (*Direct kinematic*)

Persoalan dari kinematik langsung (*direct kinematic*) adalah menentukan posisi dan orientasi dari *end effector* dengan memasukkan berupa sudut-sudut *joint*. Persamaan kinematik langsung memberikan persamaan non-linear sebagai berikut:

$$x = f(\theta) \quad (2.7)$$

Dimana x merupakan vektor yang memetakan posisi *end effector* dalam koordinat Cartesian, f adalah vektor yang berfungsi memetakan vektor joint θ dengan n dimensi pada koordinatnya *end effector*.

Dari persamaan (2.6) dapat kita peroleh persamaan kinematik langsung dalam koordinat Cartesian untuk manipulator planar 4 DOF, yaitu:

$$x = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234})) \\ (l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234})) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.7 Persamaan Differensial Kinematik

Persamaan differensial kinematik digunakan untuk menentukan hubungan antara kecepatan *joint* dengan kecepatan *end effector*. Persamaan differensial kinematik ini diperoleh dari turunan persamaan kinematik langsung (*direct kinematic*) terhadap sudut-sudut jointnya. Dengan menurunkan persamaan diatas maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\partial x = \frac{\partial f}{\partial \theta} \partial \theta \quad (2.9)$$

∂x menyatakan kecepatan *end effector* dan matrik turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ disebut matrik *Jacobian*. Matrik *Jacobian* merupakan matrik ($m \times n$) yang memetakan hubungan antara kecepatan *end effector* (\dot{x}) dan kecepatan *joint* ($\dot{\theta}$). Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$\partial x = J(\theta) \partial \theta \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) menyatakan hubungan antara kecepatan *end effector* (∂x) dengan kecepatan *joint* ($\partial \theta$).

2.8 Matrik *Jacobian*

Matrik *Jacobian* adalah suatu matrik ($m \times n$) turunan pertama dari suatu fungsi vektor yang diperoleh dari persamaan differensial kinematik. Implementasi *invers kinematik* didasarkan atas teknik matriks *Jacobian*. Tujuan dari teknik ini adalah untuk mengubah orientasi *joint* dari posisi awal *end effector* yang stabil ke suatu arah dimana *end effector* ditempatkan ke posisi yang diinginkan dalam ruang kerjanya (*workspace*). Melihat kembali persamaan differensial, maka matrik *Jacobian* dapat diperoleh dari:

$$\partial x = J(\theta) \partial \theta \quad (2.11)$$

dimana:
$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \quad (2.12)$$

jika suatu fungsi posisi *end effector* adalah:

$$x = [x_x, y_y, z_z]^T \quad (2.13)$$

Maka matrik *Jacobian* dapat dihitung:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_x}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial x_x}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_z}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_z}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial x_z}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Dari persamaan (2.14) diatas, Maka persamaan matrik *Jacobian* untuk manipulator *planar* 4 DOF dapat diturunkan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_0} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Matrik *Jacobian* untuk manipulator *planar* 4 DOF dapat juga ditulis:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Untuk menghitung masing-masing dari komponen matriks *Jacobian* yang terdapat pada robot dua lengan dengan 4 DOF dapat dilihat pada perhitungan dibawah. Adapun yang pertama dihitung adalah robot lengan satu terlebih dahulu dengan parameter awal yang sudah ditentukan dengan masing-masing sudut *joint* dan link sebagai berikut:

$$J_{11} = \frac{\partial(l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}))}{\partial \theta_0}$$

$$= -l_0 \sin(\theta_0) - l_1 \sin(\theta_{01}) - l_2 \sin(\theta_{012}) - l_3 \sin(\theta_{0123}) - l_4 \sin(\theta_{01234})$$

$$J_{12} = \frac{\partial(l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}))}{\partial \theta_1}$$

$$= -l_1 \sin(\theta_{01}) - l_2 \sin(\theta_{012}) - l_3 \sin(\theta_{0123}) - l_4 \sin(\theta_{01234})$$

$$J_{13} = \frac{\partial(l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}))}{\partial \theta_2}$$

$$= -l_2 \sin(\theta_{012}) - l_3 \sin(\theta_{0123}) - l_4 \sin(\theta_{01234})$$

$$J_{14} = \frac{\partial(l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}))}{\partial \theta_3}$$

$$= -l_3 \sin(\theta_{0123}) - l_4 \sin(\theta_{01234})$$

$$J_{15} = \frac{\partial(l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}))}{\partial \theta_4}$$

$$= -l_4 \sin(\theta_{01234})$$

$$\begin{aligned}
J_{21} &= \frac{\partial(l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234}))}{\partial \theta_0} \\
&= l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}) \\
J_{22} &= \frac{\partial(l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234}))}{\partial \theta_1} \\
&= l_1 \cos(\theta_{01}) + l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}) \\
J_{23} &= \frac{\partial(l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234}))}{\partial \theta_2} \\
&= l_2 \cos(\theta_{012}) + l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}) \\
J_{24} &= \frac{\partial(l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234}))}{\partial \theta_3} \\
&= l_3 \cos(\theta_{0123}) + l_4 \cos(\theta_{01234}) \\
J_{25} &= \frac{\partial(l_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_{01}) + l_2 \sin(\theta_{012}) + l_3 \sin(\theta_{0123}) + l_4 \sin(\theta_{01234}))}{\partial \theta_4} \\
&= l_4 \cos(\theta_{01234})
\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.9 Formulasi Invers Kinematik

Permasalahan dari invers kinematik adalah menentukan sudut-sudut *joint* jika posisi dan orientasi dari *end effector* diketahui. Persamaan invers kinematik ini diperoleh dari invers persamaan kinematik langsung, sehingga persamaan invers kinematik dapat ditulis:

$$\theta = f^{-1}(x) \tag{2.18}$$

Persamaan (2.18) ini dipakai sebagai penyelesaian hanya pada manipulator yang mempunyai struktur kinematik sederhana (manipulator *non-redundant*). Permasalahan akan timbul ketika *end effector* mencapai posisi dan orientasi tertentu didalam ruang operasional, atau struktur kinematik kompleks dan tidak mungkin menghubungkan *end effector* ke suatu set variabel *joint* yang berbeda, atau juga manipulator adalah *redundant*.

Pada sisi lain, persamaan kinematika diferensial, yang menampilkan suatu pemetaan linier antara ruang kecepatan *joint* dan ruang kecepatan operasional, walaupun bervariasi dengan konfigurasi yang sekarang. Fakta ini menyarankan kemungkinan untuk menggunakan persamaan kinematika differensial untuk mengerjakan masalah invers kinematik.

Andaikan bahwa suatu *trajectory* gerakan diberikan kepada end effector dalam kaitan dengan x dan syarat awal pada orientasi dan posisi. Tujuannya adalah untuk menentukan suatu joint *trajectory* $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ yang mungkin menghasilkan kembali *trajectory* yang diberikan

Dengan mempertimbangkan persamaan (2.14) dengan $m = n$, kecepatan joint dapat diperoleh melalui invers sederhana dari matriks *Jacobian*.

$$\dot{\theta} = \mathbf{j}^{-1}(\theta)x \quad (2.19)$$

Dimana J^{-1} adalah invers dari matrik jacobian (J) persamaan (2.19) berlaku hanya pada manipulator non-redundant untuk manipulator redundant invers matrik jacobianya digeneralisasikan untuk mendapatkan matrik generalisasi \mathbf{j}^+ . Jika sudut awal joint manipulator diketahui $\theta(0)$, maka sudut-sudut *joint* berikutnya dapat dihitung dengan mengintegrasikan kecepatan sudut *joint* terhadap waktu.

$$\theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(t)dt + \theta(0) \quad (2.20)$$

Kemudian dengan menggunakan metode integrasi *Euler*, diberikan interval integrasi Δt , jika posisi dan kecepatan joint pada waktu t_k diketahui, posisi joint pada waktu $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ dapat dihitung sebagai:

$$\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) + \dot{\theta}(t_k)\Delta t \quad (2.21)$$

Substitusi persamaan (2.19) ke persamaan (2.21), maka diperoleh persamaan sudut-sudut joint yang baru:

$$\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) + \mathbf{j}^{-1}(\theta)x(t_k)\Delta t \quad (2.22)$$

Persamaan (2.22) diatas untuk mendapatkan sudut-sudut joint yang baru.

2.10 Analisis Redundansi

Redundansi adalah sifat redundant yaitu dapat menguraikan tugas yang diberikan pada manipulator dengan berbagai macam konfigurasi manipulator dalam mencapai suatu *end-effector*. Dimana berhubungan dengan jumlah derajat kebebasan (DOF) struktur (n), jumlah variabel ruang operasional (m), dan jumlah variabel ruang operasional (r).

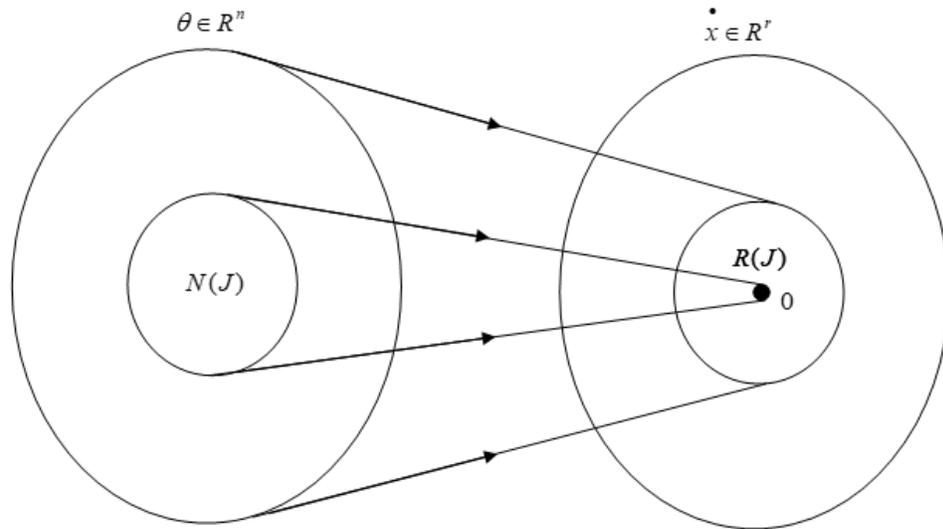
Dalam tugasnya untuk melakukan analisis sistematis redundansi, mengingat nilai differensial kinematik sebagai peta hubungan kinematik maju. Persamaan (2.23) di interpretasikan sebagai peta hubungan kinematik diferensial komponen n dari vektor kecepatan sudut pada komponen $r \leq m$ dari vektor kecepatan \dot{x} dari soal untuk tugas yang spesifik. Persamaan kinematik differensial dapat di tulis sebagai

$$\dot{x} = \mathbf{j}(\theta)\dot{\theta} \quad (2.23)$$

Dimana sekarang \dot{x} dimaksud menjadi vektor kecepatan *end effector* ($r \times 1$) untuk tugas yang spesifik dan \mathbf{J} adalah matrik ($r \times n$). matrik *Jacobian* yang dapat dikembangkan dari *jacobian* yang geometris; $\dot{\theta}$ adalah vektor ($n \times 1$) dari kecepatan *joint*. Jika $r < n$, manipulator secara kinematik adalah *redundant* dan terdapat $(n - r)$ derajat gerakan *redundant* (*redundant degrees of mobility*).

Jacobian menguraikan pemetaan linier dari ruang kecepatan *joint* menjadi ruang kecepatan *end effector*. Secara umum, ini merupakan fungsi susunan (konfigurasi). Dalam konteks kinematika diferensial, *Jacobian* harus dianggap

sebagai matrik tetap. Pemetaan secara skematik digambarkan oleh Gambar 2.4 dengan suatu notasi.



Gambar 2.4 Pemetaan antara Ruang Kecepatan Sudut (*Joint Velocity Space*) dan Ruang Kecepatan *End Effector*

Persamaan (2.23) dapat ditandai dalam kaitan dengan range dan *null space* dari pemetaan.

- *Range J* adalah sub ruang $R(J)$ di dalam R^r kecepatan *end effector* yang dapat dihasilkan oleh kecepatan *joint*, dalam bentuk manipulator yang ditentukan.
- *Null J* adalah sub ruang $N(J)$ didalam R^n kecepatan *joint* yang tidak menghasilkan kecepatan *end effector*, dalam bentuk manipulator yang ditentukan.

Ketika *end effector* mencapai orientasi atau posisi tertentu pada dalam ruang operasional, atau strukturnya kompleks dan tidaklah mungkin untuk menghubungkan posisi dan orientasi *end effector* ke satuan variabel *joint* berbeda, atau manipulator

redundant. Pembatasan ini disebabkan oleh hubungan yang nonlinear antara variabel ruang *joint* dan variabel ruang operasional.

Pada sisi lain, persamaan kinematika diferensial, yang mana dalam format (2.23), menampilkan suatu pemetaan linier antara ruang kecepatan *joint* dan ruang kecepatan operasional, walaupun bervariasi dengan konfigurasi yang sekarang. Fakta ini menyarankan kemungkinan untuk menggunakan persamaan kinematika diferensial untuk mengerjakan masalah invers kinematik.

Andaikan bahwa suatu lintasan gerakan diberikan sebagai *end effector* dalam kaitan dengan kecepatan *joint* \dot{x} dan syarat awal pada orientasi dan posisi. Tujuannya adalah untuk menentukan suatu *joint trajectory* $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ yang mungkin menghasilkan kembali *trajectory*.

Dengan mempertimbangkan persamaan (2.23) dengan $n = r$, kecepatan *joint* dapat diperoleh melalui invers sederhana dari matriks *Jacobian*. Jika konfigurasi manipulator awal diketahui, posisi *joint* dapat dihitung dengan mengintegrasikan kecepatan dari waktu ke waktu, yaitu :

$$\theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(\zeta) d\zeta + \theta(0) \quad (2.24)$$

Pengintegralan dilakukan dalam waktu diskrit dengan memilih teknik numerik. Teknik yang paling sederhana berdasar pada Metode Euler, memberi suatu interval pengintegralan, jika kecepatan dan posisi *joint* pada waktu diketahui, posisi *joint* pada waktu $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ dapat dihitung

$$\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) + \dot{\theta}(t_k) \Delta t \quad (2.25)$$

Teknik ini untuk invers kinematik yang tidak terikat pada kemampuan dari struktur kinematik.

Secara detil sekali ketika kecepatan *end effector* \dot{x} dan jacobian J diberi (untuk konfigurasi yang ditentukan θ), itu dibutuhkan untuk mencari penyelesaian $\dot{\theta}$ itu mencukupi persamaan linier (2.23) dan memperkecil kuadrat fungsional kecepatan *joint*.

$$g(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T W \dot{\theta} \quad (2.26)$$

Dimana W adalah matrik bobot definit positif simetris ($n \times n$)

Masalah ini dapat dipecahkan dengan metode *Langrangian multipliers*. Sesuai modifikasi fungsionalnya

$$g(\dot{\theta}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T W \dot{\theta} + \lambda^T (x - J\dot{\theta}) \quad (2.27)$$

dimana λ adalah suatu vektor ($r \times 1$) dari pengali yang tidak dikenal yang tergabung dalam constraint (2.23) dalam minimasi yang fungsional. Penyelesaian yang diminta harus memenuhi kondisi perlu

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}} \right)^T = 0 \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^T = 0 \quad (2.28)$$

Dari permulaan, $W\dot{\theta} - J^T \lambda = 0$ dengan demikian

$$\dot{\theta} = W^{-1} J^T \lambda \quad (2.29)$$

Dimana terdapat invers W . Penyelesaian (2.29) adalah minimum, karena $\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{\theta}^2} = W$ adalah definit positif. Dari kondisi yang kedua diatas, maka factor

dibawah ini dapat diselesaikan dengan:

$$\dot{x} = J\dot{\theta} \quad (2.30)$$

Substitusi dari kedua kondisi tersebut menjadi:

$$\dot{x} = JW^{-1}J^T \lambda \quad (2.31)$$

Asumsinya J adalah full rank, $JW^{-1}J^T \lambda$ adalah suatu matrik (r x r) yang bujur sangkar dengan rank r dan dapat di inverskan. Pemecahan untuk hasil λ

$$\lambda = (JW^{-1}J^T)^{-1} \dot{x} \quad (2.32)$$

Cara ini, sasaran ditetapkan melewati $\dot{\phi}$ menjadi tidak dapat menghindari suatu sasaran sekunder sesuai dengan sasaran pokok yang ditetapkan oleh constraint (2.33), proses lanjutan dengan cara yang sama, didapatkan hasil sebagai berikut

$$g'(\dot{\theta}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{\theta} - \dot{\phi})^T(\dot{\theta} - \dot{\phi}) + \lambda^T(\dot{x} - J\dot{\theta}) \quad (2.34)$$

Dari kondisi awal berikut

$$\dot{\theta} = J^T \lambda + \dot{\phi} \quad (2.35)$$

Yang disubstitusikan pada persamaan (2.23),

$$\lambda = (JJ^T)^{-1}(\dot{x} - J\dot{\phi}) \quad (2.36)$$

Terakhir, substitusi λ balik pada pers (2.35), sehingga

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{x} + (I - J^+ J) \dot{\phi} \quad (2.37)$$

Penyelesaian yang diperoleh terdiri atas dua bagian. Yang pertama adalah sehubungan dengan norm minimum kecepatan *joint*. Yang kedua, bagian penyelesaian homogen, usaha untuk mencukupi *constraint* tambahan yang diuraikan melalui $\dot{\phi}$: matriks $(I - J^+ J)$ adalah suatu dari semua matriks P yang memproyeksikan vektor $\dot{\phi}$ didalam *null space* J, sehingga sesuai dengan pers (2.23). konsekuensi langsung adalah bahwa, pada kasus $\dot{x} = 0$, untuk menghasilkan gerakan internal yang diuraikan oleh $(I - J^+ J) \dot{\phi}$ yang menyusun kembali struktur manipulator tanpa mengubah posisi dan orientasi *end effectornya*.

Akhirnya, menetapkan vektor $\dot{\phi}$ untuk memanfaatkan *redundant*, dengan

$$\dot{\phi} = k_a \left(\frac{\partial w(\theta)}{\partial \theta} \right)^T \quad (2.38)$$

Dimana $k_a > 0$ dan $w(\theta)$ adalah fungsi sasaran kedua dari variabel *joint*. Ketika penyelesaian bergerak sepanjang arah gradient dari fungsi sasaran, ini berusaha untuk *locally maximize* sesuai dengan sasaran pokok (*kinematic constraint*).

2.11 Manipulabilitas

Tingkat manipulabilitas menyediakan informasi tentang mutu struktur kinematik didalam pelaksanaan tugas yang diuraikan oleh variabel manipulasi. Jika tingkat manipulabilitas sama dengan m , manipulator dapat membuat beberapa gerakan kinematik yang diuraikan oleh variabel manipulasi. Jika tingkat manipulabilitas menurun dan lebih kecil dari m , maka terdapat beberapa keadaan dimana manipulator tidak dapat bergerak. Dalam keadaan yang sama, tingkat manipulabilitas pada umumnya sepadan dengan m , dan menjadi kurang di banding m hanya pada poin-poin bentuk singular. Perubahan ini adalah sesaat dan oleh karena itu, mustahil untuk meramalkannya dengan mengamati tingkat manipulabilitas. Bagaimanapun, setelah terjadi perubahan fisik dari mutu kinematik, adalah berlanjut dan harus bisa diwakili secara terus menerus dengan memilih suatu parameter yang sesuai.

Yoshikawa (1984) mengusulkan suatu ukuran berlanjut yang mengevaluasi mutu kinematik dari mekanisme robotika yang dikenal dengan ukuran manipulabilitas (*Measure of Manipulability / MoM*). MoM mengambil suatu nilai skalar nonnegative dan menjadi sama dengan nol jika dan hanya jika tingkat manipulabilitas menjadi lebih kecil dari m (dimensi dari matriks *Jacobian*), ukuran ini dapat diperlakukan sebagai jarak dari singularitas. MoM telah digunakan untuk analisa kinematika, desain dan kendali dari mekanisme robotik.

Definisi MOM diberikan sebagai berikut:

Suatu nilai skalar w diberikan oleh persamaan berikut yang disebut sebagai MoM pada satuan θ yang berhubungan dengan variabel manipulasi r .

$$w(\theta) = \sqrt{\det(J(\theta)J^T(\theta))} \quad (2.39)$$

2.12 Metode *Pseudo-Inverse*

Metode *pseudo-inverse* adalah metode yang digunakan untuk menentukan matrik generalisasi dari invers matrik *Jacobian* (J^+).

Dari pers kinematik maju

$$x = J\theta \quad (2.40)$$

Dengan mengalikan matrik *Jacobian transpose* (J^T) pada tiap ruas, maka

$$J^T x = J^T J\theta \quad (2.41)$$

Sehingga diperoleh

$$\theta = J^T (J^T J)^{-1} x \quad (2.42)$$

Dari pers (2.41) terlihat bahwa generalisasi invers dari matrik *Jacobian* adalah

$$J^+ = J^T (J^T J)^{-1} \quad (2.43)$$

J^+ inilah yang nantinya dimasukkan kedalam persamaan invers kinematik.